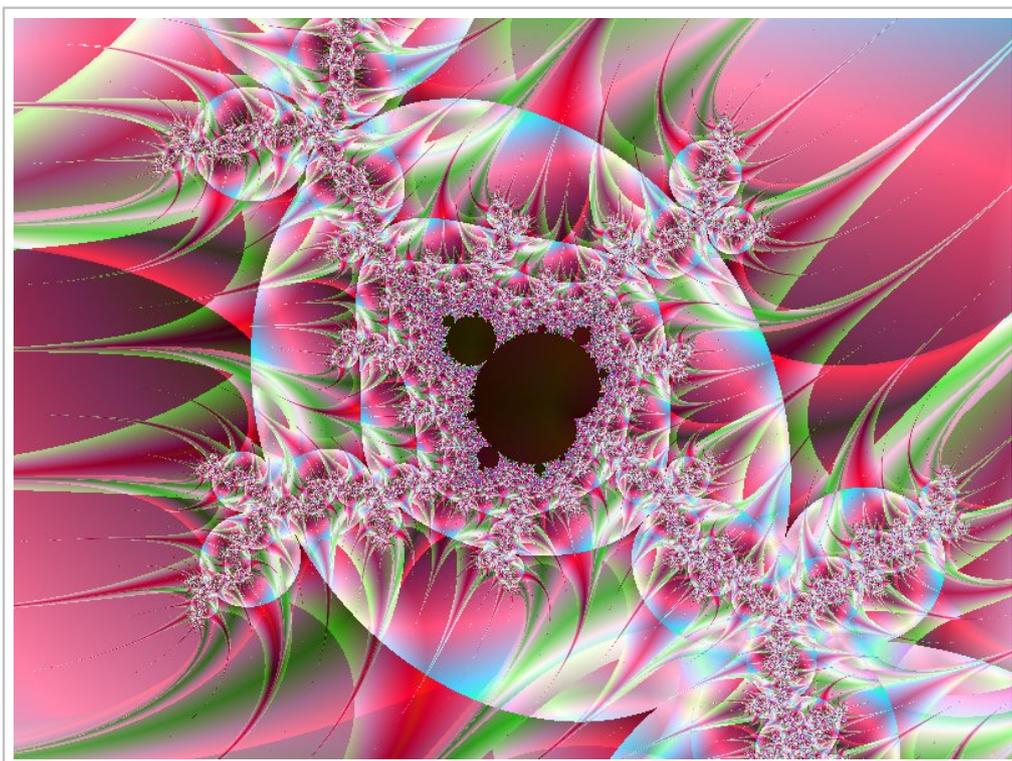


# Problemi d'esame 2001–2007



**LORENZO ROI**

---

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Marzo 2008. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto  $(-0.159450103601817, 1.0334636102756)$  e ingrandito 57.8 volte.

Titolo: **Bolle frattali.**

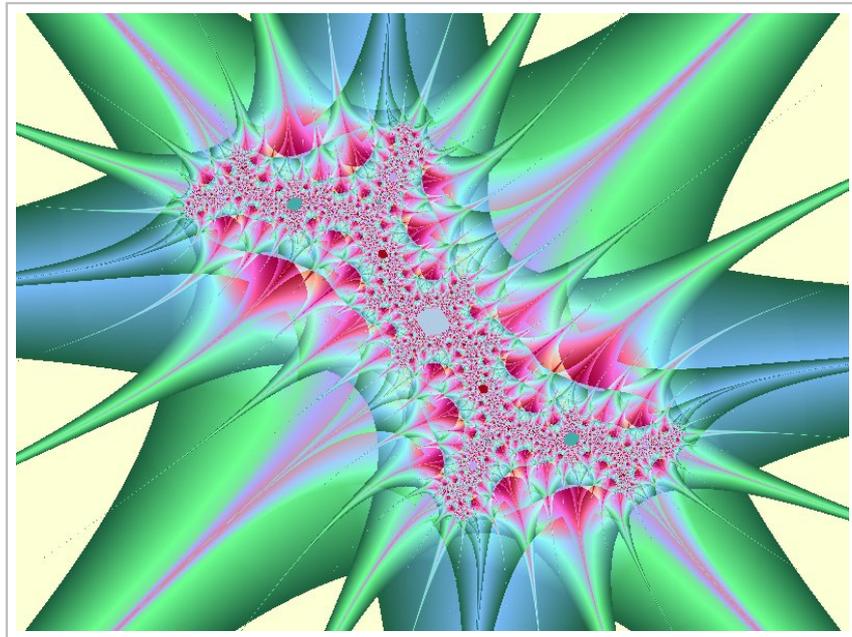
# INTRODUZIONE

Questo lavoro presenta i problemi assegnati dal 2001 agli esami di Stato di liceo scientifico sia per i corsi di ordinamento che per quelli PNI e si affianca ad una *analoga raccolta* di temi proposti agli esami nel decennio precedente.

Come nelle precedenti edizioni, le soluzioni vengono sviluppate con gradualità ponendo attenzione anche ai particolari di calcolo dato che non è raro imbattersi in difficoltà proprio su tali aspetti. Quando lo si è ritenuto utile vengono trattati pure diversi approcci risolutivi al medesimo problema.

Le nozioni necessarie sono quelle possedute al termine di un corso di studi secondari di indirizzo scientifico il che significa disporre dell'intero bagaglio di conoscenze sviluppato nell'arco dei cinque anni e non solo di quelle affrontate nell'ultimo anno.

*Lorenzo Roi*



L'insieme di Julia del frattale di copertina

# INDICE

Esame 2001 . . . . .	1
problema 1 . . . . .	1
problema 2 . . . . .	1
quesito 1 . . . . .	2
quesito 2 . . . . .	2
quesito 3 . . . . .	2
quesito 4 . . . . .	3
quesito 5 . . . . .	3
quesito 6 . . . . .	3
quesito 7 . . . . .	3
quesito 8 . . . . .	3
quesito 9 . . . . .	4
quesito 10 . . . . .	4
Esame 2001 PNI . . . . .	24
problema 1 . . . . .	24
problema 2 . . . . .	24
quesito 1 . . . . .	25
quesito 2 . . . . .	25
quesito 3 . . . . .	25
quesito 4 . . . . .	25
quesito 5 . . . . .	25
quesito 6 . . . . .	26
quesito 7 . . . . .	26
quesito 8 . . . . .	26
quesito 9 . . . . .	26
quesito 10 . . . . .	26
Esame 2002 . . . . .	49
problema 1 . . . . .	49
problema 2 . . . . .	49
quesito 1 . . . . .	50

quesito 2 . . . . .	50
quesito 3 . . . . .	50
quesito 4 . . . . .	51
quesito 5 . . . . .	51
quesito 6 . . . . .	51
quesito 7 . . . . .	51
quesito 8 . . . . .	51
quesito 9 . . . . .	52
quesito 10 . . . . .	52
Esame 2002 PNI . . . . .	70
problema 1 . . . . .	70
problema 2 . . . . .	70
quesito 1 . . . . .	71
quesito 2 . . . . .	71
quesito 3 . . . . .	71
quesito 4 . . . . .	71
quesito 5 . . . . .	71
quesito 6 . . . . .	72
quesito 7 . . . . .	72
quesito 8 . . . . .	72
quesito 9 . . . . .	72
quesito 10 . . . . .	72
Esame 2003 . . . . .	97
problema 1 . . . . .	97
problema 2 . . . . .	97
quesito 1 . . . . .	98
quesito 2 . . . . .	98
quesito 3 . . . . .	98
quesito 4 . . . . .	99
quesito 5 . . . . .	99
quesito 6 . . . . .	99
quesito 7 . . . . .	99
quesito 8 . . . . .	100
quesito 9 . . . . .	100
quesito 10 . . . . .	100
Esame 2003 PNI . . . . .	122
problema 1 . . . . .	122
problema 2 . . . . .	122

quesito 1 . . . . .	123
quesito 2 . . . . .	123
quesito 3 . . . . .	123
quesito 4 . . . . .	123
quesito 5 . . . . .	124
quesito 6 . . . . .	124
quesito 7 . . . . .	124
quesito 8 . . . . .	124
quesito 9 . . . . .	124
quesito 10 . . . . .	124
Esame 2004 . . . . .	145
problema 1 . . . . .	145
problema 2 . . . . .	145
quesito 1 . . . . .	146
quesito 2 . . . . .	146
quesito 3 . . . . .	146
quesito 4 . . . . .	146
quesito 5 . . . . .	146
quesito 6 . . . . .	146
quesito 7 . . . . .	146
quesito 8 . . . . .	147
quesito 9 . . . . .	147
quesito 10 . . . . .	147
Esame 2004 PNI . . . . .	167
problema 1 . . . . .	167
problema 2 . . . . .	167
quesito 1 . . . . .	168
quesito 2 . . . . .	168
quesito 3 . . . . .	168
quesito 4 . . . . .	168
quesito 5 . . . . .	168
quesito 6 . . . . .	168
quesito 7 . . . . .	169
quesito 8 . . . . .	169
quesito 9 . . . . .	169
quesito 10 . . . . .	169
Esame 2005 . . . . .	186
problema 1 . . . . .	186

problema 2 . . . . .	186
quesito 1 . . . . .	187
quesito 2 . . . . .	187
quesito 3 . . . . .	187
quesito 4 . . . . .	187
quesito 5 . . . . .	187
quesito 6 . . . . .	188
quesito 7 . . . . .	188
quesito 8 . . . . .	188
quesito 9 . . . . .	188
quesito 10 . . . . .	188
 Esame 2005 PNI . . . . .	 214
problema 1 . . . . .	214
problema 2 . . . . .	214
quesito 1 . . . . .	215
quesito 2 . . . . .	215
quesito 3 . . . . .	215
quesito 4 . . . . .	215
quesito 5 . . . . .	216
quesito 6 . . . . .	216
quesito 7 . . . . .	216
quesito 8 . . . . .	216
quesito 9 . . . . .	216
quesito 10 . . . . .	216
 Esame 2006 . . . . .	 234
problema 1 . . . . .	234
problema 2 . . . . .	234
quesito 1 . . . . .	235
quesito 2 . . . . .	235
quesito 3 . . . . .	235
quesito 4 . . . . .	235
quesito 5 . . . . .	235
quesito 6 . . . . .	235
quesito 7 . . . . .	236
quesito 8 . . . . .	236
quesito 9 . . . . .	236
quesito 10 . . . . .	236
 Esame 2006 PNI . . . . .	 266
problema 1 . . . . .	266

problema 2 . . . . .	266
quesito 1 . . . . .	267
quesito 2 . . . . .	267
quesito 3 . . . . .	267
quesito 4 . . . . .	267
quesito 5 . . . . .	267
quesito 6 . . . . .	267
quesito 7 . . . . .	268
quesito 8 . . . . .	268
quesito 9 . . . . .	268
quesito 10 . . . . .	268
 Esame 2007 . . . . .	 281
problema 1 . . . . .	281
problema 2 . . . . .	281
quesito 1 . . . . .	282
quesito 2 . . . . .	282
quesito 3 . . . . .	282
quesito 4 . . . . .	282
quesito 5 . . . . .	282
quesito 6 . . . . .	282
quesito 7 . . . . .	283
quesito 8 . . . . .	283
quesito 9 . . . . .	283
quesito 10 . . . . .	283
 Esame 2007 PNI . . . . .	 312
problema 1 . . . . .	312
problema 2 . . . . .	312
quesito 1 . . . . .	313
quesito 2 . . . . .	313
quesito 3 . . . . .	313
quesito 4 . . . . .	313
quesito 5 . . . . .	313
quesito 6 . . . . .	313
quesito 7 . . . . .	314
quesito 8 . . . . .	314
quesito 9 . . . . .	314
quesito 10 . . . . .	314

# ESAME 2001

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • Problema n. 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali  $x, y$ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove  $a$  è un parametro reale positivo.

- Esprimere  $y$  in funzione di  $x$  e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ .
- Determinare per quali valori di  $a$  la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta  $t$  di equazione  $x + y = 4$ .
- Scrivere l'equazione della circonferenza  $k$  che ha il centro nel punto di coordinate  $(1, 1)$  e intercetta sulla retta  $t$  una corda di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .
- Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da  $k$  è diviso dalla retta  $t$ .
- Determinare per quale valore del parametro  $a$  il grafico, di cui al punto precedente a), risulta tangente alla circonferenza  $k$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Considerato un qualunque triangolo  $ABC$ , siano  $D$  ed  $E$  due punti interni al lato  $BC$  tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi  $M$  ed  $N$  i punti medi rispettivamente dei segmenti  $AD$  ed  $AE$ .

- a) Dimostrare che il quadrilatero  $DENM$  è la quarta parte del triangolo  $ABC$ .
- b) Ammesso che l'area del quadrilatero  $DENM$  sia  $\frac{45}{2}a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo  $\angle ABC$  sia acuto e si abbia inoltre:  $\overline{AB} = 13a$ ,  $\overline{BC} = 15a$ , verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
- c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta  $BC$  e passante per i punti  $M$ ,  $N$ ,  $C$ .
- d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo  $ADC$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Indicata con  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, si sa che  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow a$ , essendo  $l$  ed  $a$  numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che  $f(a) = l$  e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

2. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che  $f(0) = 2$ . calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.

Soluzione

3. Si consideri il cubo di spigoli  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Sia  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ . I piani  $ACC'A'$  e  $D'DE$  dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

Soluzione

4. Un tronco di piramide ha basi di aree  $B$  e  $b$  ed altezza  $h$ . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume  $V$  è espresso dalla seguente formula:  $V = (1/3)h(B + b + \sqrt{Bb})$ . In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

Soluzione

5. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a, b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.

Soluzione

6. Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove  $n, k$  sono numeri naturali qualsiasi, con  $n > k > 0$ .

Soluzione

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- a) area massima e perimetro massimo;
- b) area massima e perimetro minimo;
- c) area minima e perimetro massimo;
- d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Soluzione

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo, determinare i valori di  $a$  per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

Soluzione

9. Il limite della funzione

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x},$$

quando  $x$  tende a  $+\infty$ ,

- a) è uguale a 0;
- b) è uguale ad 1;
- c) è un valore diverso dai due precedenti;
- d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Soluzione

10. Si consideri la funzione

$$\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}.$$

Stabilire se si può calcolarne il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Il testo del problema fornisce la relazione

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ a > 0 \end{cases}$$

che può esistere solo se  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ . Solo ora è possibile e conveniente esplicitare nell'equazione la variabile  $y$  come suggerito dal testo

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{y} = \frac{x-a}{ax} \quad \cdot axy \neq 0$$

e ottenere  $ax = y(x-a)$ . Ponendo l'ulteriore condizione  $x-a \neq 0$  abbiamo il sistema

$$\gamma : \begin{cases} y = \frac{ax}{x-a} \\ x \neq 0 \wedge x \neq a \\ y \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

che descrive completamente la funzione  $\gamma$  da studiare. Va notato comunque che la sola equazione

$$y = \frac{ax}{x-a}$$

rappresenta, al variare di  $a$ , un fascio di funzioni omografiche ossia di iperboli equilateri riferite ai propri asintoti e traslate: è infatti un rapporto di due polinomi di I grado. Lo studio del grafico può quindi proseguire sfruttando le conoscenze acquisite nella Geometria Analitica.

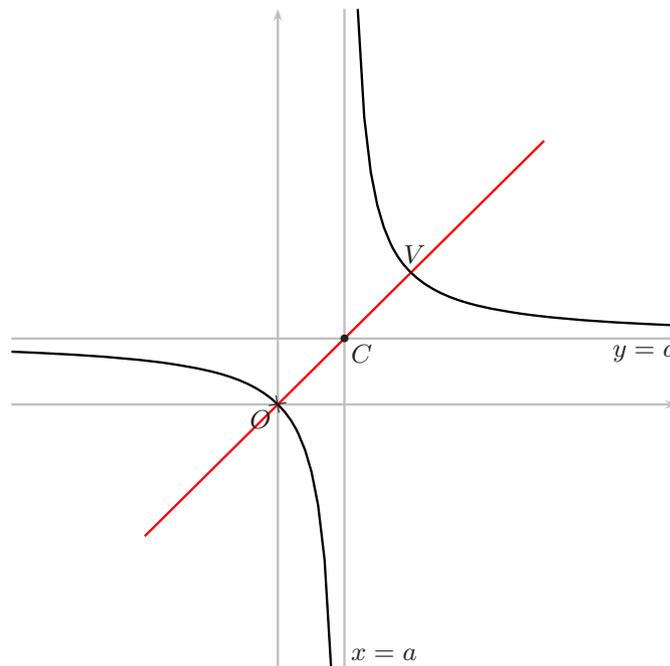
Essendo comunque un fascio verifichiamo l'esistenza o meno di punti fissi cioè di punti appartenenti a tutte le curve del fascio. Questi si ottengono fattorizzando il parametro

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \implies \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{a} \implies a(x+y) = xy$$

da cui  $a(x+y) - xy = 0$ . Indipendentemente da  $a$  i punti che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y=-x \\ xy=0 \end{cases}$$

saranno i punti fissi di  $\gamma$ . Il sistema è risolto solo da  $x=0 \wedge y=0$  per cui a causa delle condizioni espresse in (1) il fascio  $\gamma$  è formato da iperboli equilateri private tutte del vertice  $O(0,0)$ . L'altro vertice di questo fascio è di conseguenza un punto variabile.



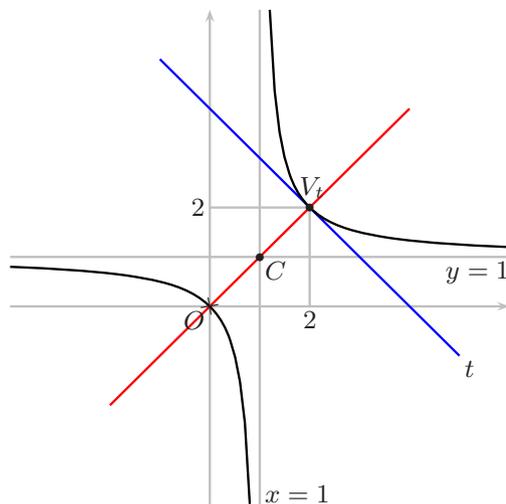
**Fig. 1.** Grafico di  $\gamma$ .

Gli asintoti hanno equazioni  $x = a$  e  $y = a/1 = a$ , quest'ultimo ottenuto come rapporto dei coefficienti dei termini di I grado del numeratore e del denominatore. Il grafico è pertanto dato dalla fig. 1 dove si è definito il punto  $C(a, a)$ , intersezione dei due asintoti. Il luogo di questi punti è evidentemente la retta di equazione  $y = x$ , rappresentata in rosso nella figura. Va inoltre sottolineato che l'origine  $O$ , pur essendo un punto fisso delle curve rappresentate dall'equazione  $y = ax/(x-a)$ , non lo è invece per le curve del sistema (1).

b) La forma esplicita della retta  $t : y = -x + 4$  mostra la sua perpendicolarità alla bisettrice  $y = x$ , luogo dei punti  $C$  ma pure dei vertici delle iperboli. Se quindi indichiamo con  $V$  il vertice di ascissa maggiore, le sue coordinate discendono immediatamente dal sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{ax}{x-a} \end{cases} \iff x = \frac{ax}{x-a}$$

dal quale, essendo  $x \neq 0$ , troviamo  $x - a = a$ ,  $x = 2a = y$ : pertanto  $V(2a, 2a)$ . La tangenza tra  $\gamma$  e  $t$  implica che sia  $V \in t$  ossia  $2a = -2a + 4$  dalla quale  $a = 1$  e  $V_t(2, 2)$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafico di  $\gamma$  e retta tangente  $t$ .

Se si ricerca la condizione di intersezione allora dovrà essere  $a < 1$  ottenuta ponendo  $x_V < x_{V_t}$  (fig. 2) cioè  $2a < 2$  dovendo in tal caso  $V$  appartenere al semipiano descritto dalla  $y < -x + 4$ . In definitiva  $t \cap \gamma \neq \emptyset$  se  $0 < a \leq 1$ .

c) Per determinare l'equazione della circonferenza  $k$  di centro  $C_1(1, 1)$  (fig. 3) troviamone il raggio seguendo un approccio geometrico. Poiché  $C_1$  appartiene alla bisettrice del I quadrante troviamo la distanza  $\overline{C_1H}$  di  $C_1$  dalla retta  $t$  e

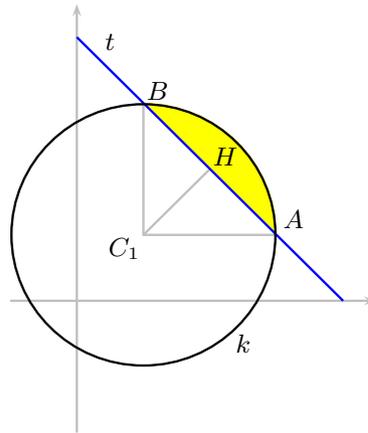
quindi, dato che è noto il valore di  $\overline{AH} = \overline{AB}/2 = \sqrt{2}$  possiamo applicare il teorema di Pitagora a  $\triangle AHC_1$  per determinare il raggio  $\overline{AC_1}$ . Pertanto

$$\overline{C_1H} = \frac{|1 - (-1 + 4)|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

da cui

$$\overline{C_1H}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{AC_1}^2 \implies (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = \overline{AC_1}^2 \implies \overline{AC_1} = 2.$$

L'equazione richiesta è  $k : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$  oppure  $k : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ .



**Fig. 3.** Circonferenza, corda  $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$  e segmento circolare.

d) Determiniamo ora le coordinate dei punti  $A$  e  $B$  (fig. 3) intersezioni di  $t$  con  $k$ :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \implies (x-1)^2 + (-x+3)^2 = 4 \implies x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Quest'ultima equazione possiede le soluzioni  $x_B = 1$  e  $x_A = 3$  cosicché i punti cercati sono  $A(3, 1)$ ,  $B(1, 3)$ . Poiché l'ordinata di  $A$  e l'ascissa di  $B$  risultano rispettivamente uguali all'ordinata e all'ascissa di  $C_1$ , ne segue che l'angolo  $\angle BC_1A$  è retto e  $\triangle C_1AB$  è rettangolo. L'area di un segmento circolare (per es. quello individuato da  $t$  e dall'arco minore  $AB$ , in giallo nella fig. 3) si trova come differenza fra l'area  $\mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) = \frac{1}{2}\alpha r^2$  di un settore circolare definito dall'angolo al centro  $\alpha$  (in radianti), e l'area di un triangolo, in questo caso  $\mathcal{A}(\triangle C_1AB)$ . Poiché questa vale

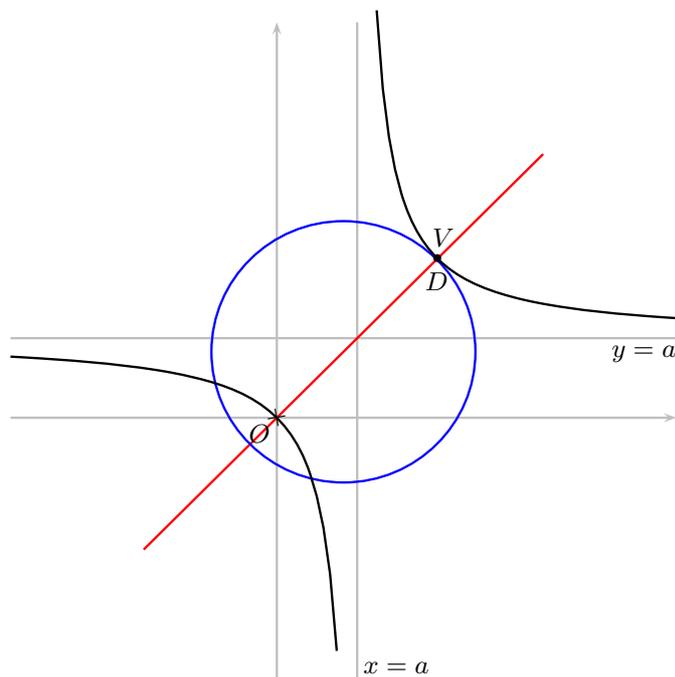
$$\mathcal{A}(\triangle C_1AB) = \frac{1}{2}\overline{AC_1} \cdot \overline{BC_1} = 2$$

ed essendo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  risulta  $\mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \overline{AC_1}^2 = \pi$  da cui

$$\mathcal{A}(\text{seg min } AB) = \mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) - \mathcal{A}(\triangle C_1AB) = \pi - 2.$$

L'area invece del segmento corrispondente all'arco maggiore  $AB$  ne discende immediatamente essendo  $\pi \overline{AC_1}^2 = 4\pi$  l'area del cerchio:

$$\mathcal{A}(\text{sett magg } AB) = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

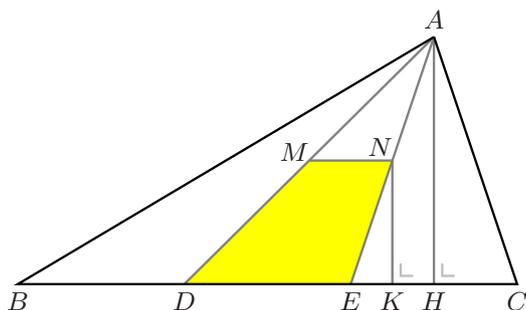


**Fig. 4.** Tangenza di  $\gamma$  con la circonferenza  $k$ .

e) Dato che entrambe le curve  $\gamma$  e  $k$  sono simmetriche rispetto alla retta bisettrice del I e III quadrante (fig. 4), queste potranno essere tangenti solo se il vertice variabile  $V$  (con coordinate dipendenti da  $a$ ) di  $\gamma$  coincide con il punto  $D$ , intersezione di  $k$  con la bisettrice. Determiniamo quest'ultimo dal sistema

$$\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \implies (x-1)^2 + (x-1)^2 = 4,$$

e quindi  $(x-1)^2 = 2$ . L'equazione fornisce i valori  $x = 1 \pm \sqrt{2}$  dei quali solo  $x_D = 1 + \sqrt{2}$  è accettabile dato che  $D$  giace nel I quadrante. Pertanto  $D(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$  e imponendo  $V \equiv D$  discende  $2a = 1 + \sqrt{2}$  e  $a = (1 + \sqrt{2})/2$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)**Fig. 1.** Triangolo  $ABC$  e trapezio  $DENM$ .

a) Costruita la fig. 1, è per costruzione  $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ : inoltre  $\overline{AM} = \overline{MD}$  e  $\overline{AN} = \overline{NE}$ . Essendo quindi  $M$  ed  $N$  i punti medi dei lati  $AD$  e  $AE$  di  $\triangle ADE$ , per un teorema di Geometria, conseguenza del t. di Talete, che afferma che il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente con la sua metà, possiamo scrivere  $MN \parallel DE$  e  $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE}$ . Poiché, per costruzione risulta  $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  si ottiene che

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\overline{BC} \right) = \frac{\overline{BC}}{6}.$$

Se  $H$  e  $K$  sono i piedi delle altezze condotte rispettivamente da  $A$  e  $N$  al lato  $BC$ , è pure  $\triangle NEK \sim \triangle AEH$  cosicché  $\overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ . Per tutto ciò il quadrilatero  $DENM$  è un trapezio con altezza pari alla metà di quella del triangolo  $ABC$ . La sua area è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DENM) &= \frac{1}{2}(\overline{DE} + \overline{MN}) \cdot \overline{NK} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{1}{6}\overline{BC} \right) \cdot \frac{1}{2}\overline{AH} \\ &= \frac{1}{4}\overline{AH} \left( \frac{1}{2}\overline{BC} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{BC} \right) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(\triangle ABC) \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare.

b) Posto che

$$\mathcal{A}(DENM) = \frac{45}{2}a^2, \quad \angle ABC < \frac{\pi}{2} \quad \overline{AB} = 13a, \quad \overline{BC} = 15a,$$

discende che

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = 4\mathcal{A}(DENM) = 4 \left( \frac{45}{2}a^2 \right) = 90a^2$$

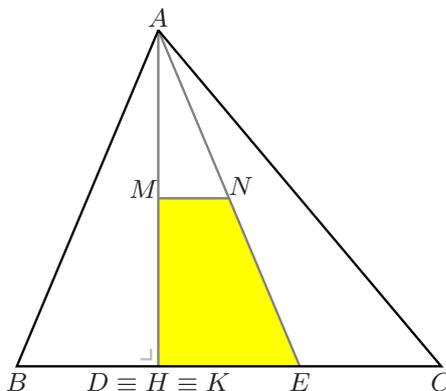
dalla quale deduciamo

$$\frac{15a \cdot \overline{AH}}{2} = 90a^2 \implies \overline{AH} = 12a.$$

Per verificare che il quadrilatero  $DENM$  risulta un trapezio rettangolo deve sussistere una delle due possibilità:

- a) se  $\angle DEA = \frac{\pi}{2}$  allora  $AE \equiv AH$  e deve valere il t. di Pitagora tra le misure dei segmenti  $AB, BE, AH$  ossia  $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AH}^2$  oppure  
 b) se  $\angle ADE = \frac{\pi}{2}$ ,  $AD \equiv AH$  e  $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AH}^2$ .

Nel primo caso risulta  $(13a)^2 - (10a)^2 \neq (12a)^2$ ; nel secondo invece  $(13a)^2 - (5a)^2 = (12a)^2$  in quanto  $(169 - 25)a^2 = 144a^2 = (12a)^2$ . La rappresentazione corretta è in questo caso la fig. 2.



**Fig. 2.** Triangolo  $ABC$  di area assegnata e trapezio  $DENM$ .

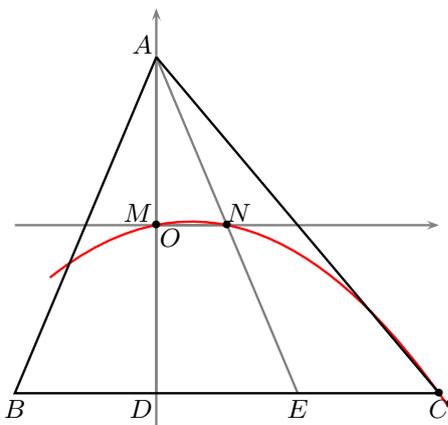
- c) Riferiamo la figura del punto precedente ad un sistema cartesiano isometrico con origine nel punto  $M$  e assi disposti parallelamente a  $MN$  e  $MA$  (fig. 3).  
 Le coordinate dei vari punti sono

$$M \equiv O(0,0), \quad N\left(\frac{5}{2}a, 0\right), \quad B(-5a, -6a), \\ D(0, -6a), \quad E(5a, -6a), \quad C(10a, -6a), \quad A(0, 6a)$$

e dove si è tenuto conto del fatto che  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 6a$ .  
 L'equazione della parabola  $p$  dovrà essere del tipo

$$y = \alpha(x - x_M)(x - x_N) = \alpha(x - 0)\left(x - \frac{5}{2}a\right) = \alpha x \left(x - \frac{5}{2}a\right)$$

per poter assicurare il passaggio per  $M$  e  $N$ . L'unica condizione che va posta è quindi l'appartenenza di  $C$  a  $p$  e ciò comporta che



**Fig. 3.** Triangolo  $ABC$ , sistema cartesiano con  $O \equiv M$  e parabola per  $M, N, C$ .

$$-6a = \alpha(10a) \left(10a - \frac{5}{2}a\right) \implies -6a = \alpha \frac{150}{2}a^2 \implies \alpha = -\frac{6}{75a}$$

e quindi

$$p : y = -\frac{6}{75a} \cdot \left(x - \frac{5}{2}a\right) = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x.$$

d) Per determinare le aree richieste conviene studiare le possibili (ulteriori) intersezioni tra la parabola e la retta  $AC$ . Quest'ultima ha equazione

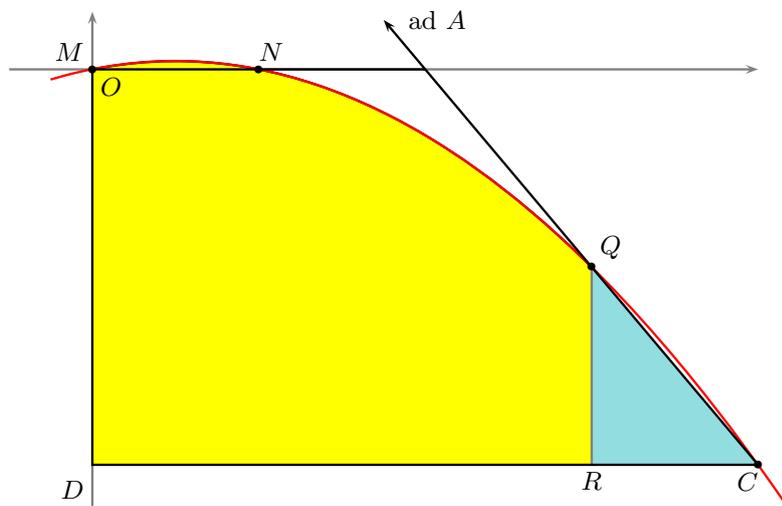
$$AC : y - 6a = \frac{6a - (-6a)}{0 - 10a} \cdot (x - 0) \implies AC : y = -\frac{6}{5}x + 6a$$

per cui

$$AC \cap p \implies \begin{cases} y = -\frac{6}{5}x + 6a \\ y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x \end{cases} \implies -\frac{6}{5}x + 6a = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x :$$

riscritta l'ultima equazione come  $2x^2 - 35ax + 150a^2 = 0$  ne discendono le soluzioni  $x_c = 10a$  e l'ulteriore  $x_Q = \frac{15}{2}a$ . In aggiunta al punto  $C$  previsto, esiste pertanto un ulteriore punto di intersezione di ascissa  $\frac{15}{2}a$  e ordinata  $y = -\frac{6}{5} \left(\frac{15}{2}a\right) + 6a = -3a$ : sia  $Q\left(\frac{15}{2}a, -3a\right)$ .

Un ingrandimento della figura precedente porta ad individuare quattro regioni finite coinvolgenti la parabola  $p$  e  $\triangle ADC$ : di queste solo tre risultano interne a



**Fig. 4.** Regioni sottostanti la parabola  $p$  e interne a  $\triangle ADC$ .

$\triangle ADC$  (le due in colore nella fig. 4 e la terza al di sopra di quella gialla delimitata dai punti  $M, N, Q, A$ ).

Sia quindi  $\mathcal{A}_1$  l'area della regione delimitata dai punti  $M, D, R, Q, N$  (in giallo nella fig. 4), con  $R(\frac{15}{2}a, -6a)$ . Considerando che la retta  $DC$  possiede equazione  $y = -6a$ ,  $\mathcal{A}_1$  risulta un trapezoide delimitato da  $p$  e dalla retta  $DC$  per cui si calcola con l'integrale definito

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{\frac{15}{2}a} \left[ -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x - (-6a) \right] dx.$$

Risolvendolo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \left[ -\frac{2}{25a} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{10} + 6ax \right]_0^{\frac{15}{2}a} \\ &= -\frac{2}{75a} \cdot \frac{15^3}{2^3} a^3 + \frac{15^2}{10 \cdot 4} a^2 + 6a \cdot \frac{15}{2} a \\ &= -\frac{225}{20} a^2 + \frac{45}{8} a^2 + 45a^2 = \frac{315}{8} a^2. \end{aligned}$$

La prima regione in cui è suddiviso il triangolo  $ADC$  è data dall'unione delle due regioni in colore nella fig. 4 cosicché l'area si ottiene da

$$\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}(\triangle QRC) = \frac{315}{8} a^2 + \frac{1}{2} \overline{RC} \cdot \overline{QR} = \frac{315}{8} a^2 + \frac{15}{4} a^2 = \frac{345}{8} a^2.$$

Per differenza si ottiene infine l'altra area richiesta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{II} &= \mathcal{A}(\triangle ADC) - \mathcal{A}_I \\
 &= \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AD} - \frac{345}{8} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 10a \cdot 12a - \frac{345}{8} a^2 \\
 &= 60a^2 - \frac{345}{8} a^2 = \frac{135}{8} a^2.
 \end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

L'ipotesi del quesito consiste nell'esistenza di

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad a, l \in \mathbb{R}.$$

Questa ipotesi non può essere sufficiente per concludere circa l'esistenza di  $f(x)$  nel punto  $a$  (cioè  $f(a) \in \mathbb{R}$ ) né, tanto meno, può discendere la sua continuità (cioè  $l = f(a)$ ). Per dimostrare quest'ultima affermazione è sufficiente proporre un esempio. Difatti la funzione

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

soddisfa alla prima condizione essendo manifestamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

ma ciò non assicura che sia  $f(0) = 1$  in quanto  $f$  nemmeno esiste in  $x = 0$ . Se comunque fosse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

allora la funzione  $f$  sarebbe continua nel punto  $a$ : ma sappiamo pure che non tutte le funzioni sono continue in  $\mathbb{R}$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

con  $f(x)$  continua in  $\mathbb{R}$  e tale che  $f(0) = 2$ . La forma del limite proposto evidenzia al numeratore la funzione integrale  $F(x)$  della funzione  $f$  e al denominatore il termine  $x$  che coincide con l'ampiezza dell'intervallo  $[0, x]$ . Una riscrittura del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right] \cdot \frac{1}{2e^x} \quad (1)$$

permette quindi di riconoscere nel primo fattore il valore medio integrale della funzione  $f$  nell'intervallo  $[0, x]$ . Studiamo perciò singolarmente ciascuno dei due limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x}.$$

Il secondo è immediato essendo  $g(x) = 1/(2e^x)$  una funzione continua in  $x = 0$ : è pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}.$$

Per il teorema della media integrale, l'argomento del I limite si può identificare con il valor medio di  $f$  nell'intervallo  $[0, x]$  per cui risulta

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(\bar{x}) \quad \text{con} \quad 0 < \bar{x} < x.$$

Poiché se  $x \rightarrow 0$  dev'essere pure  $\bar{x} \rightarrow 0$ , allora il limite si riscrive

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{\bar{x} \rightarrow 0} f(\bar{x}).$$

Infine essendo  $f(x)$  continua in  $\mathbb{R}$  e quindi anche in 0 e valendo per ipotesi  $f(0) = 2$ , si ha

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(0) = 2.$$

In definitiva, si può ora applicare il teorema del prodotto dei limiti al limite richiesto (1), cosicché si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right] \cdot \frac{1}{2e^x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

• Un altro modo per giungere a tale risultato consiste nell'osservare che, per il teorema di Torricelli-Barrow, la funzione integrale a numeratore oltreché derivabile è continua in  $[0, x]$  e possiede limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt = F(0) = 0.$$

Poiché è nullo pure il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2xe^x = 0$$

il limite proposto rientra nel caso di indeterminazione  $0/0$ . D'altra parte, le due funzioni soddisfano entrambe alle ipotesi del t. di De L'Hôpital relative alla

continuità e derivabilità cosicché conviene analizzare se esiste il limite del rapporto delle loro derivate. Poiché dal t. di Torricelli–Barrow la derivata della funzione integrale risulta essere quella integranda nell'estremo superiore,

$$D \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x)$$

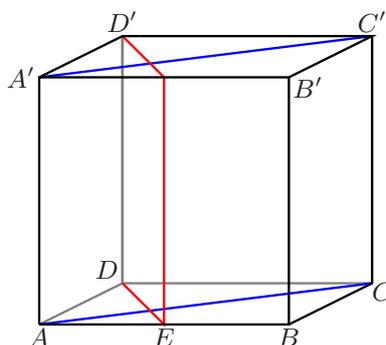
allora il limite del rapporto delle derivate è (risulta pure  $D(2xe^x) = 2e^x(1+x)$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x(1+x)} = \frac{f(0)}{2e^0(0+1)} = 1.$$

dove si è sfruttata la continuità della funzione ad argomento del limite e di ciascuna componente. Visto che il limite esiste è soddisfatta pure l'ultima ipotesi del t. di De L'Hôpital e quindi possiamo concludere che il limite richiesto è pari ad 1.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

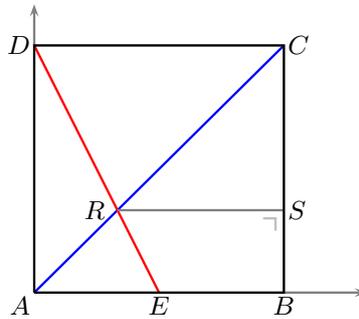
La figura sottostante mostra il cubo del problema e, in colore, i piani  $ACC'A'$  e  $D'DE$  che lo sezionano. In tal modo si formano 4 prismi, tutti aventi la medesima altezza, pari al lato  $AA'$  del cubo, per cui i rispettivi volumi differiscono solo per le diverse aree di base. Per tale motivo il problema può essere affrontato considerando una sezione piana parallela alla base  $ABCD$  o coincidente con essa.



**Fig. 1.** Il cubo sezionato  $ABCD A' B' C' D'$ .

Posto, per comodità  $\overline{AA'} = \overline{AB} = 2a$  e fatta coincidere l'origine di un sistema cartesiano con  $A$  e assi paralleli ai lati  $AB$  e  $AD$  (figura 2), è di conseguenza  $D(0, 2a)$ ,  $B(2a, 0)$ ,  $C(2a, 2a)$ ,  $E(a, 0)$ . Detta  $R$  l'intersezione di  $AC$  con  $DE$ , l'equazione della retta  $AC$  è quella della bisettrice del quadrante  $AC : y = x$  mentre per  $DE$

$$DE : y - y_D = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E}(x - x_D) \implies y - 2a = \frac{2a - 0}{0 - a}(x - 0)$$



**Fig. 2.** Sezione piana della base del cubo.

da cui  $DE : y = -2x + 2a$ .

Le coordinate di  $R$  sono le soluzioni del sistema

$$\{R\} = AC \cap DE : \begin{cases} y = x \\ y = -2x + 2a \end{cases} \implies x = -2x + 2a$$

per cui

$$R \left( \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a \right) :$$

e di conseguenza il punto  $S$ , piede dell'altezza condotta da  $R$  al lato  $BC$ , è caratterizzato dalle coordinate  $S(2a, \frac{2}{3}a)$ .

Il calcolo dell'area del quadrilatero  $EBCR$  si può suddividere nella somma delle aree del triangolo  $RSC$  e del trapezio  $EBSR$  cosicché

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(EBCR) &= \mathcal{A}(EBSR) + \mathcal{A}(\triangle RSC) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{RS}) \cdot \overline{BS} + \frac{1}{2}\overline{RS} \cdot \overline{SC} \\ &= \frac{1}{2}[a - (2a - x_R)] \cdot y_S + \frac{1}{2}(2a - x_R)(2a - y_S) \\ &= \frac{1}{2} \left[ a + \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \right] \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \\ &= \frac{7}{9}a^2 + \frac{8}{9}a^2 = \frac{5}{3}a^2. \end{aligned}$$

Essendo

$$\mathcal{A}(\triangle AER) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot |y_R| = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^2}{3}$$

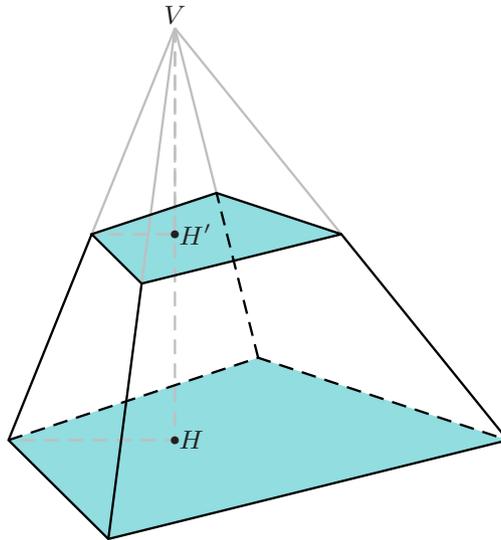
ne discende immediatamente per i volumi

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}(\text{prisma di base } AER)}{\mathcal{V}(\text{prisma di base } EBCR)} &= \frac{\mathcal{A}(EBCR) \cdot \overline{AA'}}{\mathcal{A}(\triangle AER) \cdot \overline{AA'}} \\ &= \frac{\mathcal{A}(EBCR)}{\mathcal{A}(\triangle AER)} = \frac{5}{3} a^2 \cdot \frac{3}{a^2} = 5 \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Consideriamo un tronco di piramide avente per basi due poligoni di  $n$  lati (in fig. 1,  $n = 4$ ).



**Fig. 1.** Tronco di piramide ed altezze.

Essendo i poligoni di **figura** ottenuti dall'intersezione di due piani paralleli con l'angoloide di vertice  $V$ , essi risultano simili e, per noti teoremi di Geometria Solida,

- il rapporto di similitudine è uguale al rapporto tra le distanze dal vertice dei rispettivi piani,
- le aree dei suddetti poligoni simili stanno tra loro come i quadrati delle distanze dal vertice dei rispettivi piani.

Posto per comodità di scrittura  $Y = \overline{VH}$  e  $y = \overline{VH'}$  essendo  $\overline{VH}$  e  $\overline{VH'}$  le misure delle altezze delle due piramidi rispettivamente di area di base  $B$  e  $b$ , il teorema b) afferma

$$\frac{B}{b} = \frac{Y^2}{y^2} \quad (1)$$

Il volume del tronco di piramide si ottiene per differenza tra la piramide di base maggiore con quella di base minore

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \mathcal{V}(\text{piramide base } B) - \mathcal{V}(\text{piramide base } b) \\ &= \frac{1}{3}BY - \frac{1}{3}by \end{aligned}$$

ma per la (1) quest'ultima si può riscrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \frac{1}{3}(BY - by) \quad \text{ed eliminando } B \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{Y^2}{y^2} bY - by \right) = \frac{1}{3} b \left( \frac{Y^3 - y^3}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{y^2} \cdot (Y^3 - y^3). \end{aligned}$$

Introdotta l'altezza  $h = Y - y$  del tronco di cono e ricordata l'identità  $Y^3 - y^3 = (Y - y)(Y^2 + y^2 + Yy)$ , l'ultima relazione diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{y^2} (Y - y)(Y^2 + y^2 + Yy) \\ &= \frac{1}{3} bh \left( \frac{Y^2 + y^2 + Yy}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} bh \left( \frac{Y^2}{y^2} + 1 + \frac{Y}{y} \right) \end{aligned}$$

ma per il rapporto di similitudine già discusso ed espresso dalla (1) si trova

$$\mathcal{V}(\text{tronco}) = \frac{1}{3} bh \left( \frac{B}{b} + 1 + \sqrt{\frac{B}{b}} \right).$$

In definitiva, riportando il fattore  $b$  entro parentesi,

$$\mathcal{V}(\text{tronco}) = \frac{1}{3} h \left( B + b + \sqrt{Bb} \right)$$

che è quanto si chiedeva di dimostrare.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La risposta al quesito consiste nella ben nota dimostrazione di un corollario al teorema di Lagrange del valor medio. Sia pertanto

- a)  $f$  una funzione reale di variabile reale,
- b) derivabile in  $[a, b]$  e tale che
- c)  $f'(x) = 0$  per  $\forall x \in [a, b]$ .

Consideriamo l'intervallo  $[a, x]$  con l'estremo superiore  $x$  elemento qualsiasi interno all'intervallo  $[a, b]$ . In tale intervallo la funzione  $f$  soddisfa a tutte le ipotesi del t. di Lagrange e pertanto, in base ad esso, esiste  $x_1 \in ]a, x[$  tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_1) \quad \text{con} \quad a < x_1 < x.$$

Essendo  $x_1$  un elemento dell'intervallo  $[a, b]$  per l'ipotesi c) risulta  $f'(x_1) = 0$  cosicché il rapporto a primo membro dev'essere nullo e di conseguenza anche il termine a numeratore  $f(x) - f(a) = 0$ . Da quest'ultima discende che  $f(x) = f(a)$  ma data l'arbitrarietà di  $x$  ciò equivale ad affermare la costanza della funzione per  $\forall x \in [a, b]$  c.v.d.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito chiede di dimostrare la nota identità di Stifel che si incontra nell'ambito del Calcolo Combinatorio e in particolare nel contesto delle proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

Iniziamo pertanto dalla definizione di coefficiente binomiale data in termini dei fattoriali di  $n$  e  $k$  e della loro differenza

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con} \quad 0 < k < n :$$

Ne segue che i due addendi presenti a secondo membro dell'identità (1) si riscrivono

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

e

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Sommando membro a membro si giunge a

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} :$$

ora, tenuto presente che  $k! = k \cdot (k-1)!$  e, analogamente,  $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1)!$  si riconosce che il minimo comun denominatore delle frazioni a secondo membro è  $k!(n-k)!$  per cui discende

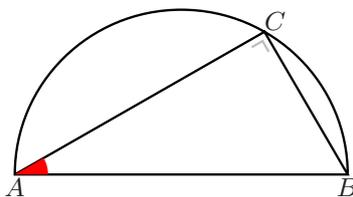
$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \quad \text{ma } (n-1)!n = n! \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La risposta al quesito è immediata nel caso dell'area del triangolo: difatti tutti i triangoli inscritti in un semicerchio possiedono la medesima base che è il diametro del cerchio. Ne segue che, tra questi, il triangolo isoscele avrà area massima in quanto è pure il triangolo inscritto che possiede la massima altezza.

Volendo tradurre il problema in termini algebrici poniamo  $x = \angle CAB$  (fig. 1) con  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $\overline{AB} = 2r$ . Ne segue che  $\overline{AC} = \overline{AB} \cos x = 2r \cos x$  e  $\overline{BC} = \overline{AB} \sin x = 2r \sin x$  e l'area è



**Fig. 1.** Triangolo inscritto in un semicerchio.

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} (2r \sin x \cdot 2r \cos x) = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x.$$

Tale funzione è massima quanto  $\sin 2x = 1$  ossia per  $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ . L'unico valore accettabile data la condizione geometrica  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  è  $x_M = \frac{\pi}{4}$  che conferma che  $\triangle ABC$  è isoscele.

Il perimetro è espresso dalla

$$\begin{aligned} 2p &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \\ &= 2r + 2r \cos x + 2r \sin x \\ &= 2r + 2r(\cos x + \sin x) \\ &= 2r \left[ 1 + \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'identità  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ . Anche in tal caso la funzione  $2p$  raggiunge dal punto di vista algebrico il massimo, quando  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$ , condizione soddisfatta dai valori  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ossia  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ . Tra questi risulta geometricamente accettabile solo il valore  $x_M = \frac{\pi}{4}$  che, ancora, implica un triangolo isoscele. In definitiva, l'unica risposta corretta è la a).

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

È data la funzione

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x \quad a \neq 0.$$

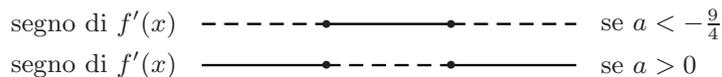
Questa rappresenta un fascio (o famiglia) di parabole cubiche, curve queste che possono presentare al massimo due punti di estremo relativo (o estremanti). Affinché quindi possieda un massimo ed un minimo relativi la sua derivata

$$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$$

deve poter cambiare segno nel suo dominio  $\mathbb{R}$  cioè la disequazione  $f'(x) \geq 0$  ossia  $3ax^2 + 4ax - 3 \geq 0$  dovrà possedere un discriminante  $\Delta > 0$ . Questo comporta

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a > 0 \quad \implies \quad a(4a + 9) > 0 \quad \implies \quad a < -\frac{9}{4} \vee a > 0.$$

In tal caso il segno di  $f'(x)$  potrà assumere i seguenti andamenti



**Fig. 1.** Segno di  $f'(x)$  con  $a < -9/4 \vee a > 0$ .

che confermano l'esistenza degli estremi relativi per  $f(x)$ .

Non ci saranno punti estremanti se invece  $f'(x)$  risulterà per  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 0$  oppure  $f'(x) \leq 0$ . Pertanto  $3ax^2 + 4ax - 3 \geq 0$  dovrà possedere un discriminante  $\Delta \leq 0$  da cui, per quanto sopra  $-\frac{9}{4} \leq a < 0$  dato che  $a \neq 0$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di determinare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}.$$

La trattazione separata del limite della funzione al numeratore non può fornire indicazioni in quanto tale limite non esiste essendo una funzione periodica. D'altra parte il numeratore è un'espressione lineare in seno e coseno e, con metodi standard della goniometria, si può scrivere identicamente

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

per cui il limite diviene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{x}.$$

Sapendo che il codominio della funzione seno è l'intervallo  $[-1, 1]$  cioè, nel nostro caso

$$-1 \leq \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1,$$

è sufficiente moltiplicare entrambe le disuguaglianze per il termine positivo  $\frac{\sqrt{2}}{x}$  per dedurre che la funzione ad argomento soddisfa a sua volta alle disuguaglianze

$$-\frac{\sqrt{2}}{x} \leq \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

L'applicazione del teorema del confronto conduce alla determinazione del limite: difatti poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{\sqrt{2}}{x} = 0$$

è pure per il suddetto teorema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = 0.$$

La risposta corretta è quindi la a).

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Cerchiamo di stabilire innanzitutto se sia possibile applicare il teorema di De l'Hôpital al calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x}.$$

Una delle ipotesi di tale teorema (che spesso, per la fretta, non viene correttamente analizzata a priori) è l'esistenza del limite del rapporto delle derivate delle due funzioni a rapporto  $f(x)$  e  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nel nostro caso questo diviene in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

e manifestamente non esiste essendovi ad argomento una funzione periodica. Pertanto il teorema non è applicabile.

Riscriviamo quindi il limite nella forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \right)}{\left( \frac{x - \operatorname{cos} x}{x} \right)}$$

dove si è diviso sia il numeratore che il denominatore per  $x$  (la condizione  $x \neq 0$  non comporta nessuna limitazione). Abbiamo pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x}} :$$

poiché, analogamente a quanto dimostrato nel precedente [quesito](#) sfruttando il teorema del confronto, risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{cos} x}{x} = 0$$

si deduce per il t. della somma di limiti che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + 0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

L'applicazione del t. del quoziente di limiti conduce infine al risultato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \frac{1}{1} = 1$$

peraltro facilmente intuibile dato che per  $x \rightarrow +\infty$  il termine preponderante nelle due espressioni  $x + \operatorname{sen} x$  e  $x - \operatorname{cos} x$  è comunque  $x$ . Difatti entrambe, per  $x \rightarrow +\infty$  sono approssimativamente uguali alla  $x$  cioè valgono le  $x + \operatorname{sen} x \approx x - \operatorname{cos} x \approx x$ .

# ESAME 2001 PNI

*La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.*

## • Problema n. 1

Sia  $AB$  un segmento di lunghezza  $2a$  e  $C$  il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ :

a) si verifichi che il luogo dei punti  $P$  tali che

$$\frac{PA}{PB} = k \quad k \text{ costante positiva}$$

è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di  $k$  per cui la soluzione degenera in una retta;

- b) si determini il luogo geometrico  $\gamma$  dei punti  $X$  che vedono  $AC$  sotto un angolo di  $45^\circ$ ;
- c) posto  $X$ , appartenente a  $\gamma$ , in uno dei due semipiani di origine la retta per  $A$  e per  $B$  e indicato con  $\alpha$  l'angolo  $\angle XAC$  si illustri l'andamento della funzione  $y = f(x)$  con  $f(x) = (XB/XA)^2$  e  $x = \operatorname{tg} \alpha$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con  $a$  e  $b$  diversi da zero.

- a) si trovino i valori di  $a$  e  $b$  tali che la curva  $\Gamma$  grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in  $x = 1$ ;
- b) si studi e si disegni  $\Gamma$ ;
- c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di  $\Gamma$  con l'asse  $x$ ;
- d) si determini l'equazione della curva  $\Gamma'$  simmetrica di  $\Gamma$  rispetto alla retta  $y = y(1)$ ;
- e) si disegni, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|.$$

Soluzione

**Questionario**

1. Provare che una sfera è equivalente ai  $2/3$  del cilindro circoscritto.

Soluzione

2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:  $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ .

Soluzione

3. Dimostrare che se  $p(x)$  è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di  $p(x)$  c'è una radice di  $p'(x)$ .

Soluzione

4. Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ . Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

Soluzione

5. Calcolare l'integrale  $\int \frac{\log x}{x} dx$ .

Soluzione

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Soluzione

7. Verificato che l'equazione  $x - e^{-x} = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Soluzione

9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Soluzione

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è di 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

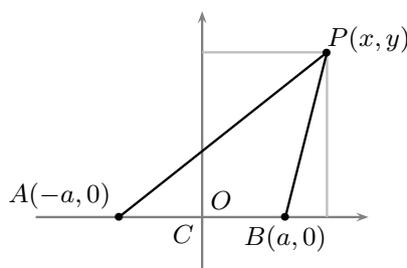
Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Considerati gli elementi forniti dal testo (segmento  $AB$  di lunghezza  $2a$  e punto medio  $C$ ), appare conveniente scegliere un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici con l'origine nel punto medio  $C$  del segmento  $AB$  e asse delle ascisse contenente  $AB$  ed orientato da  $C$  verso  $B$  (fig. 1).

Ne segue che  $A(-a, 0)$  e  $B(a, 0)$  mentre  $P(x, y)$  è un punto generico del piano che soddisfa alla relazione

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k \quad k > 0$$



**Fig. 1.** Scelta del piano cartesiano.

per cui  $P \neq B$ . La distanza di questo punto dagli estremi del segmento  $AB$  risulta data da

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \quad \overline{PB} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

per cui la relazione diviene

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = k.$$

Dato che  $k > 0$  possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dopo averli moltiplicati per il denominatore

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2].$$

Sviluppando i quadrati e ordinando secondo le potenze di  $x$  e  $y$  abbiamo

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2)$$

e infine

$$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + 2ax(1 + k^2) + a^2(1 - k^2) = 0. \quad (1)$$

Notiamo che l'equazione ottenuta risulta di secondo grado in  $x$  e in  $y$  se il coefficiente comune dei termini al quadrato soddisfa alla  $1 - k^2 \neq 0$ . Inoltre mancando del termine misto  $xy$  l'equazione rientra nella forma cartesiana tipica delle rappresentazioni algebriche delle circonferenze: dividendo per  $1 - k^2 \neq 0$ , la riscriviamo quindi come

$$x^2 + y^2 + \frac{2a(1+k^2)}{1-k^2}x + a^2 = 0 \quad 1 - k^2 \neq 0. \quad (2)$$

Per  $k \neq 1$  (è  $k > 0$ ) questa equazione rappresenta una circonferenza di centro

$$D \left( -\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0 \right)$$

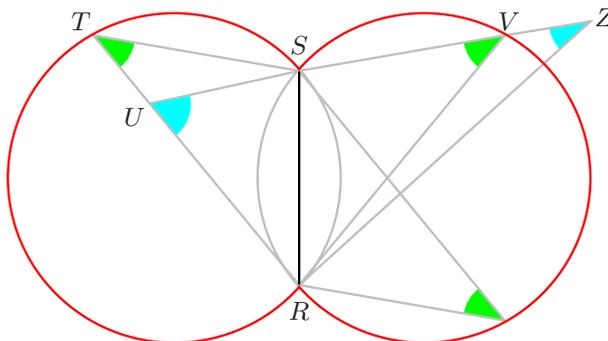
e raggio\*

$$r = \sqrt{a^2 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \left[ \frac{1+k^4+2k^2-(1+k^4-2k^2)}{(1-k^2)^2} \right]}$$

$$= \sqrt{a^2 \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}} = \frac{2ka}{|1-k^2|}.$$

Se invece  $k = 1$  l'equazione (1) si riduce alla  $4ax = 0$  che equivale alla  $x = 0$  e che rappresenta l'asse  $y$ , il quale è asse pure del segmento  $AB$ . Pertanto questo è il caso degenero prospettato dal testo.

b) Per determinare il luogo  $\gamma$  dei punti che vedono il segmento  $AC$  sotto un angolo di  $45^\circ$  conviene tener presente la proprietà elementare dei punti di una circonferenza rispetto ad una data corda. Essendo questi punti i vertici di altrettanti angoli alla circonferenza che insistono su tale corda ed essendo questi angoli tutti congruenti, possiamo affermare che i punti di uno stesso arco di circonferenza vedono una corda sotto il medesimo angolo. Se ora consideriamo la corda  $RS$  comune a due circonferenze di ugual raggio e secanti tra di loro (fig. 2), questa corda è vista sotto il medesimo angolo da ciascun punto appartenente alla figura che si ottiene dall'unione dei due archi congruenti rappresentati in colore in fig. 2.



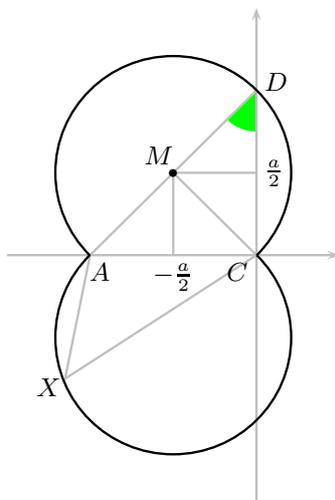
**Fig. 2.** Luogo che vede un segmento  $RS$  sotto un angolo dato.

Si può facilmente dimostrare che tale insieme di punti è l'unico che soddisfa a tale proprietà.

Difatti da ogni punto interno  $U$  alla figura la corda  $RS$  è vista sotto un angolo maggiore mentre dai punti esterni la medesima corda è vista sotto un angolo minore. A tal fine è sufficiente osservare che  $\angle RUS > \angle RTS$  come  $\angle RZS < \angle RVS$ .

---

\* Per alcune considerazioni geometriche sulla circonferenza di Apollonio si veda la pagina web [www.lorenzoroi.net/geometria/Apollonio.html](http://www.lorenzoroi.net/geometria/Apollonio.html).



**Fig. 3.** Luogo  $\gamma$  dei punti  $X$ .

Il luogo  $\gamma$  richiesto dal quesito è pertanto dato dall'unione di due archi di circonferenza aventi il segmento  $AC$  come corda comune (fig. 3). Per determinare l'equazione cartesiana di una di queste circonferenze è sufficiente individuare un terzo punto da affiancare a  $A$  e  $C$ . Tra le infinite possibilità il punto dell'asse  $y$  di coordinate  $D(0, a)$  soddisfa alla condizione  $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ , in quanto  $\triangle ACD$  è rettangolo e isoscele ( $\overline{AC} = \overline{CD} = a$ ,  $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ ). Per lo stesso motivo il medesimo punto è pure estremo del diametro della circonferenza cercata che pertanto avrà centro nel punto medio di  $AD$  ossia  $M(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  e raggio  $r = \overline{MC} = \overline{CD} \sin \frac{\pi}{4} = a/\sqrt{2}$ . L'equazione della circonferenza di centro  $M$  e raggio  $r$  è quindi

$$\left[x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right]^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \implies x^2 + y^2 + ax - ay = 0,$$

e l'arco di nostro interesse è individuato dall'ulteriore condizione  $y \geq 0$ .

Il secondo arco corrispondente alle ordinate negative si ottiene per simmetria assiale dalla precedente circonferenza con la sostituzione  $y \rightarrow -y$ : otteniamo  $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$  e  $y < 0$ . In definitiva, il luogo  $\gamma$  cercato viene espresso dalle

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + ax - ay = 0, & y \geq 0 \\ x^2 + y^2 + ax + ay = 0, & y < 0 \end{cases}$$

ma più sinteticamente, può essere rappresentato anche dall'unica equazione

$$\gamma : x^2 + y^2 + ax - a|y| = 0.$$

c) Scelto il semipiano delle ordinate positive, per determinare le lunghezze di  $XA$  e  $XB$  (fig. 4) in termini di  $\alpha = \angle XAC$  e relativa tangente goniometrica,

osserviamo che  $XA$  è lato di  $\triangle XAC$ , triangolo del quale risultano noti i tre angoli,  $\alpha = \angle XAC$ ,  $\angle CXA = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle ACX = \pi - (\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}\pi - \alpha$  e il lato  $\overline{AC} = a$ . Al variare del punto  $X$  sull'arco di circonferenza, l'angolo  $\alpha$  potrà inoltre assumere i valori compresi nell'intervallo  $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$ .

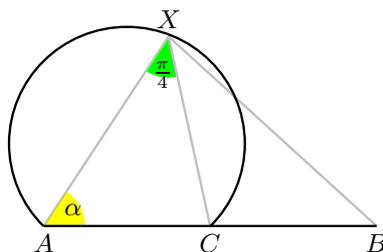


Fig. 4.

Con il teorema dei seni siamo quindi in grado di determinare  $\overline{XA}$  risolvendo la proporzione

$$\frac{\overline{XA}}{\sin \angle ACX} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle CXA} \implies \frac{\overline{XA}}{\sin \left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

per cui

$$\overline{XA} = a\sqrt{2} \sin \left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right).$$

Dovendo esprimere il rapporto  $(\overline{XB}/\overline{XA})^2$  in termini di  $\operatorname{tg} \alpha$  conviene riportare l'espressione trovata in termini dell'angolo  $\alpha$  utilizzando le formule di sottrazione per il seno:

$$\begin{aligned} \overline{XA} &= a\sqrt{2} \left( \sin \frac{3}{4}\pi \cos \alpha - \cos \frac{3}{4}\pi \sin \alpha \right) \\ &= a\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \\ &= a(\cos \alpha + \sin \alpha). \end{aligned}$$

Per calcolare  $\overline{XB}^2$  possiamo applicare il teorema di Carnot a  $\triangle ABX$  dato che abbiamo sia  $\overline{AB}$  che  $\overline{XA}$  e l'angolo compreso. Pertanto

$$\begin{aligned} \overline{XB}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{XA}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{XA} \cos \alpha \\ &= (2a)^2 + a^2(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2(2a)a(\cos \alpha + \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= a^2[4 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha] \\ &= a^2(5 - 2\sin \alpha \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

Il rapporto chiesto risulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2 &= \frac{a^2(5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha)}{a^2(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2} \\ &= \frac{5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2} \end{aligned}$$

con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}\pi$  in quanto va escluso il caso che sia  $\overline{XA} = 0$  corrispondente ad  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ . Per esprimerlo in termini di  $x = \operatorname{tg} \alpha$  dovremo eseguire la divisione del numeratore e del denominatore del secondo membro per  $\cos^2 \alpha$  ponendo ovviamente  $\cos \alpha \neq 0$  e quindi escludendo pure  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Poiché  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  discende

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2 &= \frac{(5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha) / \cos^2 \alpha}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2 / \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(5/\cos^2 \alpha) - 2 \operatorname{tg} \alpha - 4}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \\ &= \frac{(5 + 5 \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 \operatorname{tg} \alpha - 4}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \\ &= \frac{5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \end{aligned}$$

In definitiva, la funzione  $f(x)$  da studiare risulta

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1 + x)^2}$$

ma le condizioni accumulate su  $\alpha$  ossia

$$0 \leq \alpha < \frac{3}{4}\pi \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

si riflettono sulla  $x = \operatorname{tg} \alpha$ . Per determinare queste ultime va tenuto presente l'andamento della tangente (rappresentato dal grafico in colore di fig. 5): per angoli compresi nel primo quadrante essa assume qualsiasi valore positivo o nullo mentre i valori di  $\operatorname{tg} \alpha$  quando sia  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi$  appaiono essere minori di  $-1$ .

La funzione da studiare e le limitazioni della variabile  $x$  sono pertanto

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1 + x)^2} \quad x < -1 \vee x \geq 0.$$

La funzione  $f$ , a prescindere dalle condizioni geometriche discusse è definita in  $\mathbb{R} - \{-1\}$  per cui potremo estendere il suo studio pure in questo dominio. In

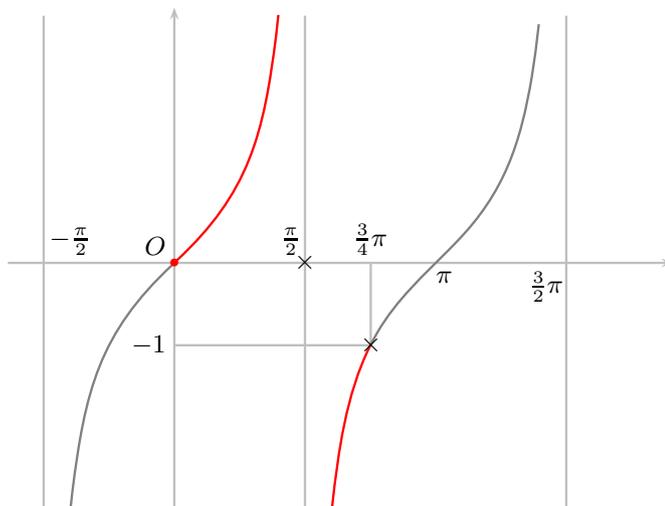


Fig. 5.

quest'ultimo insieme essa rientra nella classe delle funzioni razionali fratte e pertanto risulta continua in tutti i punti che non annullano il denominatore ossia  $\forall x \neq -1$ .

- Segno:  $f(x) > 0$  implica  $5x^2 - 2x + 1 > 0$  in quanto il denominatore risulta sempre positivo. Avendo il trinomio discriminante sempre negativo ( $\Delta/4 = 1 - 5 < 0$ ) la disequazione è sempre soddisfatta cosicché  $f(x) > 0 \forall x \neq -1$ .
- Limiti. I limiti agli estremi del dominio,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$  sono finiti in quanto, per la teoria delle funzioni razionali fratte il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore. Risulta pertanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 - (2/x) + (1/x^2)}{(1 + 1/x)^2} = \frac{5}{1} = 5$$

in quanto i termini del tipo  $1/x$ ,  $1/x^2$  possiedono ciascuno limite nullo all'infinito. La retta  $y_a = 5$  risulta quindi un asintoto orizzontale.

Se invece studiamo il limite nel punto dove non esiste la funzione  $\lim_{x \rightarrow -1\pm} f(x)$  troviamo

$$\lim_{x \rightarrow -1\pm} f(x) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 - 2x + 1 = 5 - 2(-1) + 1 = 8 \quad \lim_{x \rightarrow -1} (1 + x)^2 = (1 - 1)^2 = 0^+$$

La retta  $x = -1$  è quindi asintoto verticale.

Il confronto con l'asintoto orizzontale  $y_a = 5$  implica lo studio della disequazione

$$f(x) - y_a \geq 0 \quad \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2} - 5 \geq 0.$$

Abbiamo

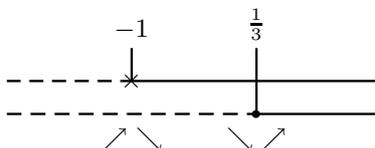
$$\frac{5x^2 - 2x + 1 - 5(1+x^2 + 2x)}{(1+x)^2} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-12x - 4}{(1+x)^2} \geq 0$$

che comporta  $-12x - 4 \geq 0$  ossia  $x \leq -\frac{1}{3}$ . Pertanto la funzione interseca l'asintoto nel punto di ascissa  $-\frac{1}{3}$  mentre avrà ordinate maggiori per valori  $x < -\frac{1}{3}$ .

• Derivata prima. Il calcolo della  $f'(x)$  conduce all'espressione

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x - 2)(1+x)^2 - 2(1+x)(5x^2 - 2x + 1)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{2(5x - 1 + 5x^2 - x - 5x^2 + 2x - 1)(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{4(3x - 1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Il segno di questa  $f'(x) \geq 0$  dipende sia dal numeratore che dal denominatore. Da  $3x - 1 \geq 0$  discende  $x \geq 1/3$  mentre il denominatore risulta positivo quando  $(1+x)^3 > 0$ ,  $1+x > 0$ ,  $x > -1$ . Combinandoli otteniamo lo schema



**Fig. 6.**

che mostra come la funzione sia crescente per  $x < -1$  oppure per  $x > 1/3$ . La  $f$  possiede inoltre un minimo relativo proprio in  $x = 1/3$  che pure risulta assoluto. Il valore di questo minimo si ottiene dalla  $f(1/3) = 1/2$ .

• Derivata seconda. La derivata seconda risulta

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \cdot \frac{3(1+x)^3 - 3(1+x)^2(3x-1)}{(1+x)^6} \\ &= 12 \cdot \frac{(1+x-3x+1)(1+x)^2}{(1+x)^6} \\ &= \frac{24(1-x)}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

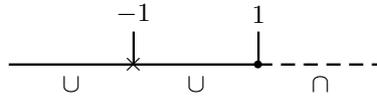
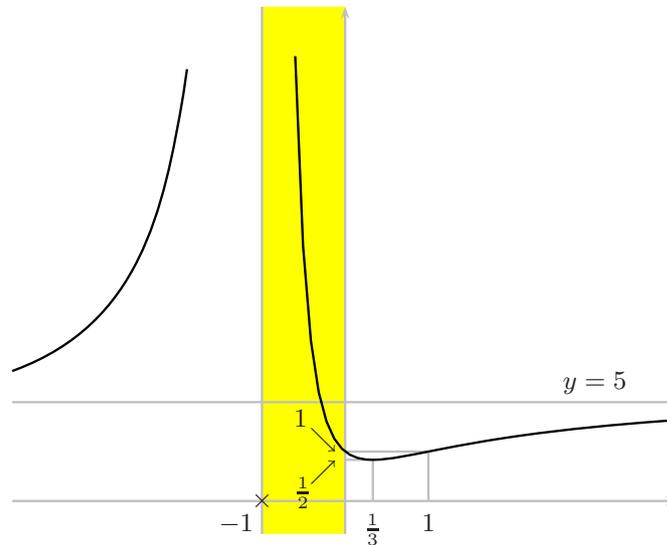


Fig. 7.

e il suo segno dipende solo dal termine  $f''(x) \geq 0$ ,  $1 - x \geq 0$  che implica  $x \leq 1$ . La concavità sarà quindi rivolta verso l'alto quando  $x < 1$  come riassunto dallo schema di fig. 7.

L'unico punto di flesso si ha in corrispondenza di  $x = 1$  e l'ordinata corrispondente è  $f(1) = 1$ . Notato che  $f(0) = 1$ , il grafico complessivo è riportato in fig. 8 dove, la parte di grafico che soddisfa alle limitazioni geometriche ( $x < -1 \vee x \geq 0$ ) risulta quella esterna alla fascia di piano evidenziata in giallo.

Fig. 8. Grafico (qualitativo) della funzione  $f$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) Il dominio della funzione assegnata  $f : y = x^2 + a \ln(x + b)$  con  $a, b \neq 0$ , deve evidentemente rispettare la condizione  $x + b > 0$  ossia  $x > -b$ . Dovendo il grafico di  $f$  attraversare l'origine, va inoltre soddisfatta l'equazione  $f(0) = 0$  che implica  $0^2 + a \ln(0 + b) = 0$  da cui, essendo  $a \neq 0$ ,  $\ln(b) = 0$  risolta da  $b = 1$ . La funzione

$$f : y = x^2 + a \ln(x + 1) \quad \text{con} \quad x > -1$$

deve inoltre presentare un minimo assoluto in  $x = 1$ . Notato che, nel suo dominio,  $f$  risulta derivabile, si può soddisfare alla richiesta imponendo che la sua derivata

prima sia nulla in  $x = 1$  ossia valga  $f'(1) = 0$ . Lo studio del segno di  $y'$  o il calcolo di  $y''$  potranno successivamente chiarire il carattere di tale punto visto che la condizione  $f'(1) = 0$ , pur necessaria, non è sufficiente per rispondere alla richiesta. Pertanto

$$f'(x) = 2x + \frac{a}{x+1} \quad f'(1) = 0 \quad 2 + \frac{a}{2} = 0 \quad \implies \quad a = -4.$$

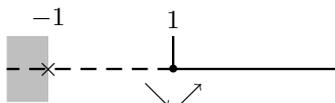
La funzione cui si è giunti risulta quindi

$$f(x) = x^2 - 4 \ln(x+1) \quad x > -1$$

mentre la sua derivata prima è

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x+1}.$$

Notato che il denominatore di quest'ultima espressione risulta sempre positivo nel dominio  $\mathcal{D} = ]-1, +\infty[$ , lo studio del segno di  $f'(x) \geq 0$  si riduce alla disequazione  $x^2 + x - 2 \geq 0$ , risolta da  $x \leq -2 \vee x \geq 1$ . Tenendo ancora una volta conto del dominio, possiamo pertanto confermare che la funzione  $f$  presenta un minimo assoluto in  $x = 1$ , essendo in  $] -1, 1[$  monotona decrescente, crescente invece strettamente in  $]1, +\infty[$ .

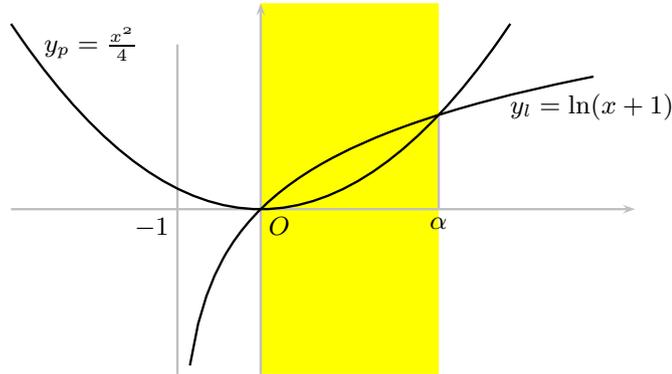


**Fig. 1.** Segno di  $f'$ .

b) Essendo richiesto il grafico  $\Gamma$  di  $f$  converrà continuare il suo studio a partire dallo studio del segno. Questo implica la ricerca delle soluzioni della disequazione (contenente termini razionali e trascendenti)  $x^2 - 4 \ln(x+1) \geq 0$ . Poiché non vi sono metodi analitici per la risoluzione di tali disequazioni miste cercheremo, tramite un confronto grafico, di riconoscere comunque la struttura delle sue soluzioni. Riscritta quindi nella forma

$$x^2 \geq 4 \ln(x+1) \quad \frac{x^2}{4} \geq \ln(x+1)$$

possiamo reinterpretare la ricerca delle soluzioni come la ricerca delle ascisse dei punti della parabola di equazione  $y_p = x^2/4$  che hanno ordinate maggiori o eguali alle ordinate dei punti della curva logaritmica  $l : y = \ln(x+1)$ . Il grafico di quest'ultima curva è noto in quanto appare essere nient'altro che quello del logaritmo  $y' = \ln x'$  traslato verso sinistra di una unità. Difatti la curva  $l$  è



**Fig. 2.** Confronto grafico di  $y_p = x^2/4$  e  $y_l = \ln(x+1)$ .

immagine secondo la traslazione  $x' = x+1$  e  $y' = y$  della curva logaritmica. Dato che l'origine appartiene sia a quest'ultima che alla parabola, i rispettivi grafici rivelano l'esistenza di un loro ulteriore punto di intersezione di ascissa  $\alpha > 0$ .

La funzione  $f$  risulterà positiva o nulla quando  $x \leq 0 \vee x \geq \alpha$  ossia per i valori di  $x$  esterni alla fascia gialla di fig. 2.

I limiti agli estremi del dominio forniscono

$$\lim_{x \rightarrow -1+} x^2 - 4 \ln(x+1) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -1+} x^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} -4 \ln(x+1) = \lim_{z \rightarrow 0+} -4 \ln z = +\infty,$$

mentre il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1)$$

conduce alla forma indeterminata  $+\infty - \infty$  dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 \ln(x+1) = -\infty.$$

Allo scopo di risolverlo, riscriviamo la funzione fattorizzando il termine  $x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

e calcoliamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore della funzione ad argomento di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

così da poter, eventualmente, applicare il teorema di De L'Hôpital: otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x(x+1)} = 0.$$

Esistendo tale limite, possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e, rilevato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = 0$$

possiamo risolvere il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = +\infty$$

in quanto il termine tra parentesi quadre ha limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = 1 - 0 = 1.$$

Con tale risultato, la funzione potrebbe presentare un asintoto obliquo. Va quindi affrontato l'ulteriore limite

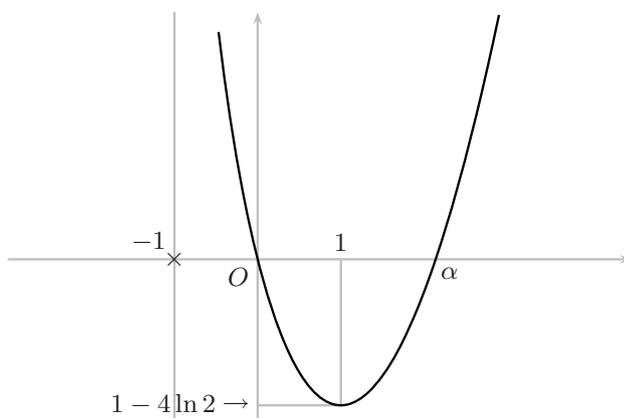
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

che risulta ancora pari a  $+\infty$  in base alle medesime osservazioni. Possiamo quindi escludere l'esistenza di un tale asintoto obliquo.

Derivata seconda. Il calcolo fornisce

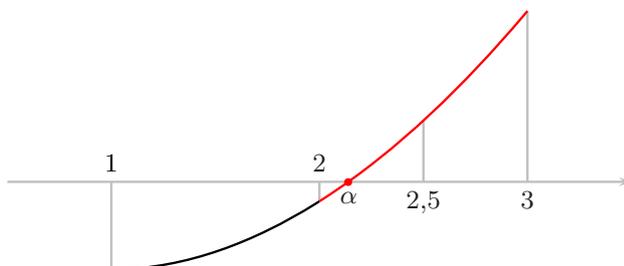
$$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2},$$

espressione manifestamente sempre positiva nel dominio: il grafico  $\Gamma$  volge sempre la concavità verso l'alto ossia  $f$  risulta convessa. Calcolata l'ordinata del minimo assoluto  $f(1) = 1 - 4 \ln 2$ , possiamo concludere proponendo il grafico  $\Gamma$  richiesto: questo è rappresentato in fig. 3.



**Fig. 3.** Grafico  $\Gamma$  della funzione  $f$ .

c) Come visto, la funzione  $f$  assume in  $x = 1$  il valore  $f(1) = 1 - 4 \ln 2 < 0$ . Inoltre essendo  $f$  monotona crescente per  $x > 1$  in quanto  $f'(x) > 0$  ed avendo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  esiste, per il teorema degli zeri, un'unica intersezione con l'asse delle ascisse che, sempre **precedentemente**, abbiamo identificato con  $\alpha$  (fig. 4).



**Fig. 4.** Grafico di  $f$  per  $x \in [1, 3]$ .

Volendo ottenere una sua approssimazione con il metodo di bisezione, dobbiamo individuare un estremo dove la funzione risulti positiva. Allora procedendo per tentativi calcoliamo  $f(2) = 4 - 4 \ln 3 = 4(1 - \ln 3)$ . Poiché  $f(2) < 0$  proviamo ancora con  $f(3)$ : si ottiene  $f(3) = 9 - 4 \ln 4 \approx 3,45 > 0$  per cui  $\alpha$  apparterrà all'intervallo  $2 < \alpha < 3$ .

Calcoliamo quindi la  $f$  nel punto medio di questo intervallo: risulta

$$f(2,5) = 1,23895 > 0 \quad \text{per cui segue che} \quad 2 < \alpha < 2,5.$$

Procedendo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} f(2,25) &\approx +0,34788 &\implies & 2 < \alpha < 2,25 \\ f(2,125) &\approx -0,042112 &\implies & 2,125 < \alpha < 2,25 \\ f(2,1875) &\approx +0,148209 &\implies & 2,125 < \alpha < 2,1875 \end{aligned}$$

Si giunge infine, con ulteriori iterazioni al valore  $\alpha \approx 2,1391$ .

c) Per determinare l'equazione della curva  $\Gamma'$  immagine di  $\Gamma$  secondo la simmetria assiale di asse  $y = y(1) = 1 - 4 \ln 2$  conviene riprendere le equazioni generali per tale trasformazione. Queste sono rappresentate dalle

$$\sigma : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

e si ottengono imponendo che il punto medio del segmento di estremi  $(x, y)$  e  $(x', y')$  appartenga all'asse di equazione  $y = b$  ossia valga la  $(y + y')/2 = b$ . Queste nel nostro caso diventano

$$\sigma : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2y(1) = -y + 2(1 - 4 \ln 2). \end{cases}$$

Scritta la trasformazione inversa

$$\sigma^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = -y' + 2(1 - 4 \ln 2) \end{cases}$$

basta ora sostituire in luogo di  $x$  e  $y$  nella equazione rappresentativa di  $\Gamma$   $y = x^2 - 4 \ln(x + 1)$ , ottenendo

$$-y' + 2(1 - 4 \ln 2) = (x')^2 - 4 \ln(x' + 1)$$

da cui infine l'equazione rappresentativa dell'insieme immagine  $\Gamma'$

$$y' = 2 - 8 \ln 2 - (x')^2 + 4 \ln(x' + 1).$$

d) Il grafico della funzione  $g : y = |x^2 - 4 \ln(x + 1)|$  si deduce da quello già studiato di  $f$  considerando l'azione del valore assoluto sul suo argomento.

Trattando il problema in forma generale, il grafico della funzione  $g : y = |f(x)|$  appare l'unione di due rami, ciascuno dei quali è descritto, per la definizione di valore assoluto, dalle equazioni

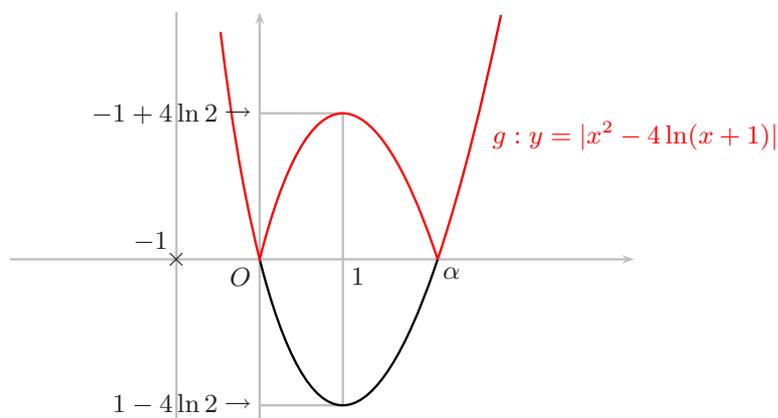
$$g : \begin{cases} y = f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ y = -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Ne segue che, per i valori di  $x$  che soddisfano alla condizione  $f(x) \geq 0$  ossia dove il grafico di  $f$  appartiene al semipiano delle ordinate positive, il grafico di  $g$  coincide con quello di  $f$  in quanto descritto dalla medesima equazione. In corrispondenza dell'insieme di valori di  $x$  dove  $f(x) < 0$  il grafico di  $g$  risulta il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse di quello di  $f$  in quanto l'equazione  $y = -f(x)$  deriva dalla  $y = f(x)$  imponendo la simmetria assiale  $x' = x \wedge y' = -y$ .

Nel nostro caso quindi, l'equazione  $g : y = |x^2 - 4 \ln(x + 1)|$  si esplicita nei due rami

$$g : \begin{cases} y = x^2 - 4 \ln(x + 1), & \text{se } -1 < x \leq 0 \vee x \geq \alpha \\ y = -[x^2 - 4 \ln(x + 1)] = -x^2 + 4 \ln(x + 1), & \text{se } 0 < x < \alpha. \end{cases}$$

In fig. 5 appare in colore il grafico di  $g$  e, per  $x \in ]0, \alpha[$  il grafico originario di  $f$ .



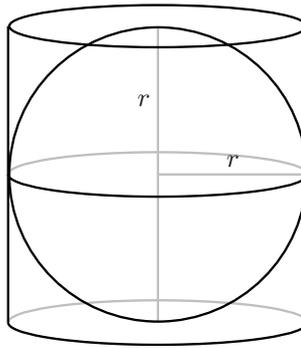
**Fig. 5.** Grafico della funzione  $g$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $r$  il raggio noto della sfera: il suo volume risulta espresso dalla formula

$$\mathcal{V}(\text{sfera}) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Il cilindro ad essa circoscritto, rappresentato in fig. 1 possiede il raggio di base pari al raggio  $r$  della sfera e l'altezza uguale al diametro  $2r$ .



**Fig. 1.** Sfera e cilindro circoscritto.

Il suo volume risulta quindi

$$\mathcal{V}(\text{cilindro}) = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Il loro rapporto è

$$\frac{\mathcal{V}(\text{sfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$$

come richiesto dal quesito.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ , equazione che contiene sia espressioni razionali che funzioni trascendenti dell'incognita  $x$ , possiamo sfruttare l'approccio grafico che, in tali casi può fornire informazioni anche significative. Riscriviamo quindi l'equazione in forme più opportune in modo da poter riconoscere, almeno parzialmente, funzioni note dell'incognita. Notato quindi che  $x = 0$  non può essere soluzione dell'equazione data in quanto  $-2 \neq 0$ , dividiamo per  $x$  entrambi i membri e sommiamo il termine  $2/x$ : otteniamo

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{x}.$$

Posto  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e  $g(x) = 2/x$ , la ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione viene ricondotta alla ricerca del numero delle intersezioni tra i grafici rappresentativi di  $f$  e  $g$ . Poiché il grafico di  $g$  è quello noto di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ed appartenente al I e III quadrante, studiamo brevemente quello di  $f$ .

Innanzitutto l'equazione  $f(x) = e^x + e^{-x}$  soddisfa all'identità  $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  per cui rappresenta una funzione pari. Risulta inoltre sempre positiva. I limiti agli estremi del dominio  $\mathbb{R}$  forniscono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  (e viceversa  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ ).

La derivata prima risulta  $f'(x) = e^x - e^{-x}$  per cui  $f'(x) \geq 0$  se  $e^x - e^{-x} \geq 0$  ossia  $e^x \geq e^{-x}$ . Quest'ultima implica  $x \geq -x$  e quindi  $x \geq 0$ : in  $x = 0$  la funzione  $f$  presenta pertanto un minimo relativo ed assoluto (con  $f(0) = 2$ ) mentre per  $x > 0$  risulta strettamente crescente.

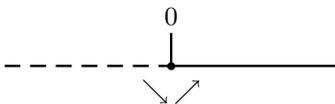


Fig. 1.

Gli elementi accumulati ci permettono di proporre un abbozzo di grafico per la  $f$  (fig. 2) che, assieme a quello dell'iperbole equilatera  $g$ , mostra come i grafici delle due funzioni debbano intersecarsi in un sol punto di ascissa positiva  $\alpha$ .

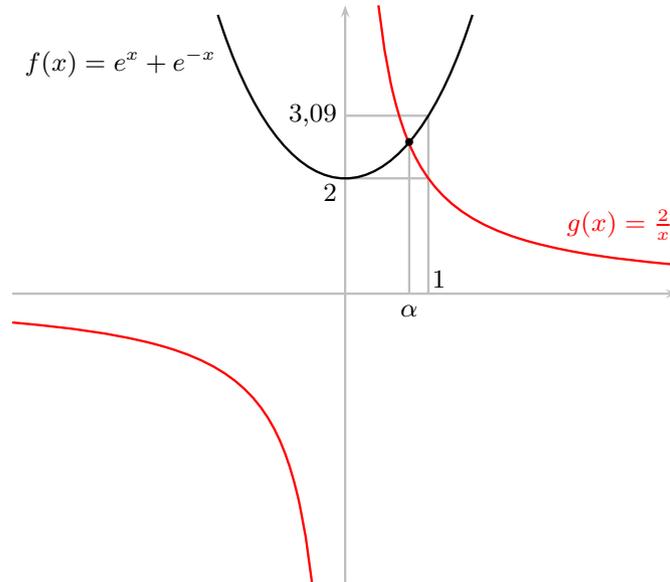
Se poi calcoliamo  $f(1) = e + e^{-1} \approx 3,09$  e  $g(1) = 2$  e osserviamo che  $f(1) > g(1)$  possiamo proporre una prima stima di  $\alpha$  ossia  $0 < \alpha < 1$ .

### Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Consideriamo il polinomio  $p(x)$  e siano  $\alpha$  e  $\beta$  due sue radici distinte e quindi tali che  $p(\alpha) = p(\beta) = 0$ . Supponiamo che sia  $\alpha < \beta$ . Poiché un polinomio rappresenta una funzione

- continua in tutto  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo  $[\alpha, \beta]$  ed inoltre
- è derivabile in  $] \alpha, \beta [$  (così come in  $\mathbb{R}$ ) ed infine
- i suoi valori agli estremi di  $[\alpha, \beta]$  sono uguali perché  $p(\alpha) = p(\beta) = 0$ ,

possiamo applicare il teorema di Rolle essendo soddisfatte tutte le ipotesi di questo teorema. Pertanto possiamo concludere che deve esistere almeno un valore  $\gamma$  con  $\gamma \in ] \alpha, \beta [$  in corrispondenza del quale  $p'(\gamma) = 0$  ossia  $\gamma$  è una radice dell'equazione  $p'(x) = 0$ .



**Fig. 2.** Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il calcolo della derivata prima della funzione

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x \quad \text{con } x \in [-1, 1]$$

è immediato e conduce all'espressione

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

valida per  $x \in ]-1, 1[$ . Poiché  $f$  è definita in  $[-1, 1]$ , derivabile internamente e con derivata nulla, possiamo applicare il corollario del teorema di Lagrange (o del valor medio) per concludere che  $f(x)$  è costante in  $[-1, 1]$ . Calcolando quindi il suo valore in un punto qualsiasi di tale intervallo, per esempio in  $x = 0$ , risulta  $f(0) = \arcsen 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ : pertanto

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1],$$

relazione già nota nell'ambito delle funzioni inverse e che lega l'arcoseno con l'arcocoseno.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale indefinito

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

si può calcolare riconoscendo nel fattore  $\frac{1}{x}$  la derivata del termine  $\ln x$ . In tal caso conviene ricorrere alla sostituzione

$$t = \ln x \quad \text{per cui il differenziale è} \quad dt = D(\ln x) dx = \frac{1}{x} dx$$

e quindi ricondurre l'integrale richiesto ad uno elementare

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

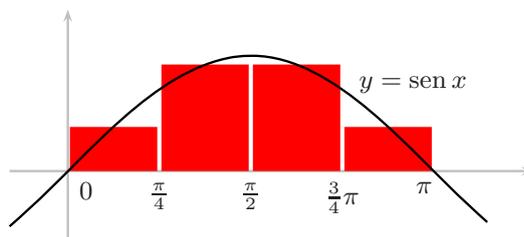
Il valore esatto dell'integrale definito è facilmente calcolabile in quanto

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2,$$

e dove si è fatto uso dell'integrale indefinito elementare

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

Richiamato il grafico del seno nell'intervallo  $[0, \pi]$  (fig. 1), per il calcolo approssimato applichiamo il metodo dei rettangoli suddividendo questo intervallo  $[0, \pi]$  in  $n$  intervalli parziali di ampiezza  $h = (\pi - 0)/n = \pi/n$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $y = \sin x$ .

Posto quindi  $x_0 = 0$ , discende che gli estremi degli intervalli parziali sono dati dai valori

$$x_1 = x_0 + h = h, \quad x_2 = x_1 + h = 2h, \quad \dots, \quad x_i = ih, \quad \dots, \quad x_n = \pi,$$

e in ciascuno di questi intervalli calcoliamo la funzione nel punto medio: per l' $i$ -esimo intervallo, l'altezza (positiva) del rettangolo risulta

$$f\left(ih - \frac{h}{2}\right) = f\left[h\left(i - \frac{1}{2}\right)\right] = \text{sen } h\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

La somma quindi delle aree dei rettangoli fornisce infine una stima  $\mathcal{A}(n)$  dipendente da  $n$  dell'area richiesta

$$\mathcal{A}(n) = \sum_1^n h \text{sen } h\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_1^n \text{sen } h\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

A partire da  $n = 1$  dove  $\mathcal{A}(1) = \pi \cdot 1 = \pi$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(2) &= \frac{\pi}{2} \left( \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \text{sen } \frac{\pi}{4} + \text{sen } \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,2214, \end{aligned}$$

mentre per  $\mathcal{A}(3)$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(3) &= \frac{\pi}{3} \left( \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \text{sen } \frac{\pi}{6} + \text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } \frac{5}{6}\pi \right) \approx 2,0944. \end{aligned}$$

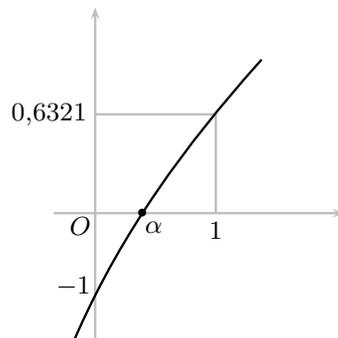
$\mathcal{A}(4)$  fornisce invece

$$\mathcal{A}(4) = \frac{\pi}{4} \left( \text{sen } \frac{\pi}{8} + \text{sen } \frac{3}{8}\pi + \text{sen } \frac{5}{8}\pi + \text{sen } \frac{7}{8}\pi \right) \approx 2,05234.$$

Procedendo ulteriormente il valore di  $\mathcal{A}(n)$  fornisce stime dell'area sempre in eccesso (per esempio,  $\mathcal{A}(10) \approx 2,00825$ ) ma sempre più prossime a 2.

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Posto  $f(x) = x - e^{-x}$  notiamo che il dominio di  $f$  coincide con  $\mathbb{R}$  e che, in esso, la derivata prima risulta  $f'(x) = 1 - (-1)e^{-x} = 1 + e^{-x}$ . Poiché  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  la funzione risulta strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  e quindi pure in  $[0, 1]$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x) = x - e^{-x}$  in  $[0, 1]$ .

I suoi valori agli estremi risultano di segno opposto,  $f(0) = 0 - e^{-0} = -1 < 0$  e  $f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e \approx 0,6321 > 0$  per cui, in base al teorema degli zeri (o di Bolzano) applicabile alle funzioni continue in un intervallo chiuso, possiamo affermare l'esistenza di almeno un valore  $\alpha$  in corrispondenza del quale si ha  $f(\alpha) = 0$ . Per la monotonia crescente di  $f$  questo valore deve inoltre essere unico e ciò è assicurato dal teorema sull'esistenza della funzione inversa di una funzione continua e monotona in un intervallo: se esiste  $f^{-1}$  allora  $\alpha = f^{-1}(0)$  è unico. Determiniamo quindi  $\alpha$  con un approccio numerico, il metodo di bisezione. Calcoliamo quindi la funzione  $f$  nel punto medio  $x = 0,5$ . Poiché  $f(0,5) = -0,1065 < 0$ , il successivo intervallo risulta  $[0,5, 1]$ . Ne segue:

$$\begin{aligned} f(0,75) &\approx +0,2776 &\implies & 0,5 < \alpha < 0,75 \\ f(0,625) &\approx +0,0897 &\implies & 0,5 < \alpha < 0,625 \\ f(0,5625) &\approx -0,0072 &\implies & 0,5625 < \alpha < 0,625 \end{aligned}$$

Procedendo in tal modo, si giunge dopo 10 iterazioni alla stima  $\alpha \approx 0,567$ .

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La probabilità richiesta si può calcolare ricordando la definizione classica di probabilità ossia come rapporto tra i casi favorevoli ad un evento con il numero dei casi possibili. Essendo 16 gli allievi il numero  $C_{16,3}$  di gruppi che si possono formare con 3 elementi, indifferentemente di soli maschi o sole femmine o misti, è espresso dal coefficiente binomiale

$$C_{16,3} = \binom{16}{3} = 560$$

in quanto tale numero si può identificare con il numero delle combinazioni semplici di 16 elementi a gruppi di 3.

Analogamente, il numero dei gruppi di soli tre maschi è dato dal coefficiente binomiale

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220$$

in quanto 12 sono i maschi presenti nella classe. Ne segue che la probabilità richiesta risulta

$$P = \frac{C_{12,3}}{C_{16,3}} = \frac{220}{560} \approx 0,3929.$$

Al medesimo risultato si può giungere applicando il teorema della probabilità composta. Sia  $E$  l'evento che vede scelti 3 allievi maschi.  $E$  può essere scomposto nell'intersezione di altri tre eventi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  rispettivamente

$E_1$  = viene scelto per primo un ragazzo maschio

$E_2$  = viene scelto per secondo un ragazzo maschio

$E_3$  = viene scelto per terzo un ragazzo maschio

Pertanto

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) :$$

l'associatività dell'intersezione e il teorema della probabilità condizionata (o composta) permette di scrivere

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1 \cap (E_2 \cap E_3)) = P(E_1) \cdot P((E_2 \cap E_3)/E_1)$$

e riapplicando il teorema al termine  $P((E_2 \cap E_3)/E_1)$  otteniamo

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/(E_1 \cap E_2)). \quad (1)$$

Ma essendo 12 gli allievi maschi su 16 complessivi allora  $P(E_1) = \frac{12}{16}$  mentre

$$P(E_2/E_1) = \frac{12-1}{15} = \frac{11}{15},$$

essendo rimasti dopo la prima scelta solo 11 maschi su 15 allievi. Infine, la probabilità di  $E_3$  dopo che si sono avverati  $E_1$  ed  $E_2$  (sono rimasti 10 maschi su 14) è data da

$$P(E_3/(E_1 \cap E_2)) = \frac{12-2}{14} = \frac{10}{14}.$$

Inserendo questi valori nella (1) risulta infine

$$P(E) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1320}{3360} \approx 0,3929.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Un sistema assiomatico o teoria formale si ritiene definito quando siano dati, a) un linguaggio, b) un sistema di assiomi e c) un insieme di regole di deduzione. Tralasciando le caratteristiche del linguaggio e come questo si possa costruire, a seconda dell'insieme di proprietà *primitive* che si vuole assumere come verità costitutive, verità che non necessitano di dimostrazione per la loro evidenza intuitiva, si possono formulare uno o più sistemi formali. Tali proprietà sono appunto gli assiomi o postulati della teoria. Con le regole di deduzione si ottengono poi i teoremi della teoria.

Per quanto riguarda la geometria, la distinzione che Euclide pone nel primo libro dei suoi "Elementi" tra assiomi e postulati, i primi considerati come enunciati matematici generali mentre i secondi sono visti come asserzioni a carattere geometrico, oggi non risulta più valida essendo i due termini divenuti sinonimi. In entrambi i casi Euclide considera la verità di tali proposizioni garantita dall'evidenza intuitiva per cui non ne è necessaria una dimostrazione. Ogni altra affermazione che non sia una definizione, costituisce invece un teorema e va rigorosamente dimostrata. Esempi di assiomi euclidei espressi nella forma oggi più comune sono:

postulato 1—*per due punti distinti passa una e una sola retta;*

postulato 2—*una retta contiene infiniti punti;*

postulato 5—*per un punto esterno ad una retta, passa una sola parallela ad essa.*

Quest'ultimo postulato, detto anche *postulato delle parallele*, ha a livello storico, svolto un ruolo determinante per la nascita delle geometrie non-euclidee. Difatti il fallimento dei tentativi per dedurre questa affermazione dagli altri assiomi portarono *Nicolaj Lobacevskij* a riconoscerne l'indipendenza di tale assioma dai rimanenti e quindi ad una nuova definizione di parallelismo e ad una nuova geometria. L'indipendenza degli assiomi per un sistema assiomatico è quindi una proprietà della teoria formale. Con la pubblicazione nel 1901 dei "*Grundlagen der Geometrie*" ("*I fondamenti della Geometria*"), *David Hilbert* forniva una sistemazione assiomatica rigorosa della geometria (o meglio delle "geometrie") e dell'insieme dei suoi assiomi.

Altre proprietà di una teoria assiomatica sono la coerenza (o non contraddittorietà dei suoi assiomi) e la completezza: nel caso di quest'ultima caratteristica, *Kurt Gödel* nel 1931 ha dimostrato che ogni teoria formale contiene affermazioni o formule che non sono né dimostrabili né possono essere negate (teorema di incompletezza): in ogni teoria formale si possono allora incontrare proposizioni indecidibili.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Nel quesito proposto vengono richiamati due tipi di velocità: la velocità media in un certo intervallo di tempo e la velocità indicata dal tachimetro che intendiamo come la velocità istantanea ossia la velocità in un qualsiasi istante  $t$ . Se  $s(t)$

è la legge che lega la posizione dell'automobile durante il viaggio al punto di partenza in funzione del tempo (rappresenta quindi la legge oraria) e  $t_1$  è la durata complessiva del viaggio, la velocità media nell'intervallo  $[0, t_1]$ , è definita come

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(0)}{t_1 - 0}. \quad (1)$$

Se, com'è naturale, supponiamo che nell'istante iniziale  $t = 0$  l'automobile si trovi nel punto di partenza allora  $s(0) = 0$  km e la velocità media assume l'espressione più semplice

$$v_m = \frac{s(t_1)}{t_1} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (2)$$

Poiché il viaggio si svolge senza soste possiamo supporre che la funzione  $s(t)$  sia derivabile in tutti i punti dell'intervallo  $[0, t_1]$ : possiamo perciò applicare ad essa in tale intervallo il teorema di Lagrange e quindi affermare che esiste almeno un istante  $t_0$  con  $0 < t_0 < t_1$  tale che

$$\frac{s(t_1) - s(0)}{t_1 - 0} = s'(t_0)$$

e dove  $s'(t_0)$  rappresenta la derivata di  $s(t)$  calcolata in  $t_0$ . Poiché la derivata  $s'(t)$  si interpreta dal punto di vista fisico come la velocità dell'auto nell'istante  $t$  ossia la velocità indicata dal tachimetro, in base alle (1) (2) risulta che

$$\exists t_0 \in ]0, t_1[ \quad \text{dove} \quad s'(t_0) = \frac{s(t_1)}{t_1} = v_m.$$

L'uguaglianza ottenuta prova quanto richiesto, ossia che durante il viaggio la velocità istantanea può, almeno in un istante, essere uguale alla velocità media.

# ESAME 2002

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • Problema n. 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnata la curva  $k$  di equazione  $y = f(x)$ , dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

- Determinare per quali valori di  $x$  essa è situata nel semipiano  $y > 0$  e per quali nel semipiano  $y < 0$ .
- Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine  $O$  degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse  $y$ , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva  $k$  nel punto di ascissa  $-1$  (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
- Stabilire se la retta tangente alla curva  $k$  nel punto di ascissa  $-1$  ha in comune con  $k$  altri punti oltre a quello di tangenza.
- Determinare in quanti punti la curva  $k$  ha per tangente una retta parallela all'asse  $x$ .
- Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione  $f(x)$  assegnata, relativamente all'intervallo  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$a + 2x, \quad a - x, \quad 2a - x, \quad (1)$$

dove  $a$  è una lunghezza nota non nulla ed  $x$  è una lunghezza incognita.

- a) Determinare per quali valori di  $x$  le lunghezze (1) si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
- b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze (1), ne esiste uno di area massima o minima.
- c) Verificato che per  $x = a/4$  le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- d) Indicato con  $ABC$  il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che  $BC$  sia il lato maggiore, si conduca per  $A$  la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto  $D$  tale che  $AD$  sia lungo  $a$ : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani  $DBC$  e  $ABC$ .

Soluzione

### Questionario

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

Soluzione

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali  $A'$  e  $A''$  e volumi  $V'$  e  $V''$ . Si sa che  $A'/A'' = 2$ . Calcolare il valore del rapporto  $V'/V''$ .

Soluzione

3. Considerati i numeri reali  $a, b, c, d$  – comunque scelti – se  $a > b$  e  $c > d$  allora:

$$\text{a) } a + d > b + c; \quad \text{b) } a - d > b - c; \quad \text{c) } ad > bc; \quad \text{d) } \frac{a}{d} > \frac{b}{c}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Soluzione

4. Si consideri la seguente proposizione: “La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica”. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

Soluzione

5. Determinare, se esistono, i numeri  $a, b$  in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

Soluzione

6. Si consideri la funzione

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ .

Soluzione

7. Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x)$  tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

Soluzione

8. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[1, 3]$  e derivabile nell'intervallo aperto  $(1, 3)$ . Si sa che  $f(1) = 1$  e inoltre  $0 \leq f'(x) \leq 2$  per ogni  $x$  dell'intervallo  $(1, 3)$ . Spiegare in maniera esauriente perché risulta  $1 \leq f(3) \leq 5$ .

Soluzione

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani  $(Oxy)$ , è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

- a) un punto;
- b) due punti;
- c) infiniti punti;
- d) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

10. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , continua per ogni  $x$ , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a, \quad \int_0^6 f(x) dx = b,$$

dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4.$$

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

- a) Assegnata la curva  $k$  di equazione

$$k : y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$$

conviene esplicitare innanzitutto il suo dominio  $D$ , definito dall'unica condizione  $x^3 + 2 \neq 0$ . Questa implica  $x^3 \neq -2$  dalla quale  $x \neq \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ . Pertanto  $D = \mathbb{R} - \{-\sqrt[3]{2}\}$ .

Per determinare i valori appartenenti al semipiano delle ordinate positive ( $y > 0$ ) va perciò risolta la disequazione

$$y > 0 \quad \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} > 0 \quad \implies \quad x^3 + 2 > 0 \quad \implies \quad x^3 > -2.$$

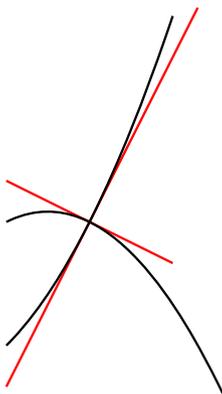
Essendo la radice di indice dispari si può estrarre la radice cubica di entrambi i membri ed ottenere  $x > -\sqrt[3]{2}$ .

Analogamente la condizione  $y < 0$  comporta  $x^3 + 2 < 0$  ossia  $x^3 < -2$  e quindi  $x < -\sqrt[3]{2}$ .

b) Il passaggio per  $O$  implica che sia  $c = 0$  per l'equazione rappresentativa della parabola  $\gamma : y = ax^2 + bx + c$  richiesta dal testo. Poiché  $\gamma$  passa pure per il punto di  $k$  di ascissa  $-1$ , la relativa ordinata si ottiene calcolando

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2}{(-1)^3 + 2} = 3.$$

Definiamo quindi il punto comune alle due curve come  $A(-1, 3)$ . Questo punto dovrà appartenere a  $\gamma$  e quest'ultima, in  $A$ , dovrà incidere perpendicolarmente a  $k$  come esemplificato dalla fig. 1.



**Fig. 1.** Esempio di incidenza ortogonale di due curve.

Pertanto, come seconda condizione, i coefficienti angolari delle rette tangenti a ciascuna curva dovranno soddisfare alla condizione di perpendicolarità nel punto  $A$ . Ne segue per le derivate

$$y' = D(ax^2 + bx) = 2ax + b$$

e in  $x = -1$  si ha  $y'(-1) = -2a + b$ . La derivata della funzione  $k$  risulta

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 2) - 3x^2(x^2 + 2)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2x^4 + 4x - 3x^4 - 6x^2}{(x^3 + 2)^2} = \frac{x(-x^3 - 6x + 4)}{(x^3 + 2)^2}$$

e poiché  $f'(-1) = -1(1 + 6 + 4) = -11$  la condizione di perpendicolarità si scrive

$$y'(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \quad \text{cioè} \quad -2a + b = \frac{1}{11}.$$

L'altra condizione, come detto, è connessa all'appartenenza di  $A$  alla parabola  $\gamma$ ,  $3 = a(-1)^2 + b(-1)$  per cui dalla loro applicazione discende il sistema

$$\begin{cases} 3 = a - b \\ -2a + b = \frac{1}{11}. \end{cases}$$

Si deducono facilmente i valori  $a = -34/11$  e  $b = -67/11$  ossia l'equazione della parabola richiesta è

$$\gamma : y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x.$$

c) La retta tangente a  $k$  in  $A$  si calcola immediatamente sfruttando l'espressione generale che fornisce l'equazione della tangente nel punto  $(x_0, f(x_0))$  alla curva di equazione  $y = f(x)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso risulta

$$t : y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \implies \quad y - 3 = -11(x + 1) \quad y = -11x - 8.$$

Per ricercare eventuali altri punti di intersezione tra  $k$  e la tangente  $t$  vanno studiate le possibili soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \end{cases}$$

non dimenticando che, essendo le due "curve" tangenti in  $A$  una con l'altra, tale sistema dovrà presentare a) la soluzione  $x = -1$ , b) tale soluzione dovrà avere molteplicità almeno pari a 2. Pertanto l'equazione risolvente

$$-11x - 8 = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \quad \implies \quad (x^3 + 2)(-11x - 8) = x^2 + 2$$

e che si può riscrivere come  $11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$ , deve presentare la radice  $x = -1$  per due volte. Applicando quindi, per due volte, la divisione con il metodo di Ruffini si ha:

	11	8	1	22	18
-1		-11	3	-4	-18
	11	-3	4	18	0

cioè  $(x-1)(11x^3 - 3x^2 + 4x + 18)$ . Riapplicandolo al secondo polinomio fattore

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 11 & -3 & 4 & 18 \\ -1 & & -11 & 14 & -18 \\ \hline & 11 & -14 & 18 & 0 \end{array}$$

otteniamo la seguente scomposizione per l'equazione risolvente  $(x-1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$ . Uguagliato a zero il secondo fattore

$$11x^2 - 14x + 18 = 0 \quad \text{questo possiede} \quad \frac{\Delta}{4} = 7^2 - 11 \times 18 = -149 < 0$$

per cui non vi possono essere altre soluzioni reali del sistema iniziale. Ciò significa, in definitiva, che la retta tangente non incontra ulteriormente la curva  $k$  in punti distinti da  $A$ .

d) Per rispondere al quesito è sufficiente studiare le soluzioni dell'equazione  $f'(x) = 0$  in quanto l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione afferma che quest'ultima rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente e dalla geometria analitica si conosce che una retta orizzontale possiede coefficiente angolare nullo. Ne segue esplicitamente l'equazione

$$f'(x) = \frac{x(-x^3 - 6x + 4)}{(x^3 + 2)^2} = 0$$

dalla quale abbiamo  $x(-x^3 - 6x + 4) = 0$ . Questa è risolta innanzitutto da  $x = 0$  mentre per gli eventuali valori non nulli potranno discendere dalla

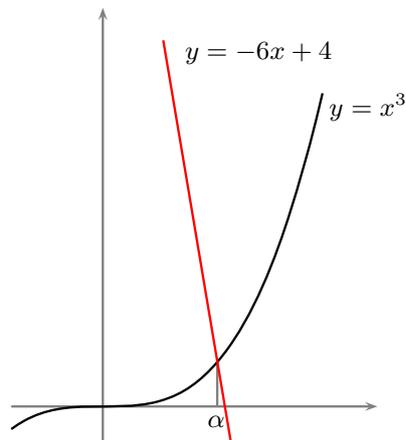
$$-x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Poiché il tentativo che sfrutta, come possibili radici, i divisori del termine noto 4 ossia  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ , non conduce ad alcun risultato in quanto i resti della divisione secondo il metodo di Ruffini sono tutti diversi da zero, converrà ricercare le possibili soluzioni aiutandosi con un approccio grafico.

Pertanto riscritta l'equazione nella forma  $x^3 = -6x + 4$  possiamo interpretare la ricerca delle sue soluzioni come equivalente alla ricerca delle intersezioni tra le curve del seguente sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -6x + 4. \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta la parabola cubica più semplice mentre la seconda una retta di coefficiente angolare negativo e termine noto positivo. La rappresentazione grafica, per entrambe, è immediata e viene riportata in fig. 2. Dall'analisi dei loro grafici discende l'esistenza di un'altra soluzione reale positiva  $\alpha$ . Poiché  $-6x + 4 = 0$  per  $x = 2/3$ , la radice  $\alpha$  soddisfa alle disuguaglianze



**Fig. 2.** Grafici di  $y = x^3$  e  $y = -6x + 4$ .

$0 < \alpha < 2/3$ . In definitiva la curva  $k$  possiede due punti a tangente orizzontale corrispondenti alle ascisse  $x = 0$  e  $x = \alpha$ .

e) Le ipotesi del teorema di Lagrange o del valor medio sono

- 1) la funzione di equazione  $y = f(x)$  dev'essere definita e continua  $[a, b]$  e
- 2) derivabile in  $]a, b[$

In tali ipotesi il teorema assicura

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \text{tale che} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poiché l'unico valore dove la funzione  $k$  non è definita è  $x = -\sqrt[3]{2}$  si tratta innanzitutto di assicurarci che questo valore non sia interno all'intervallo  $[-\sqrt{2}, 0]$  proposto dal testo cioè che sia  $-\sqrt[3]{2} < -\sqrt{2}$ . Moltiplicando entrambi i membri per  $-1$  ne segue  $\sqrt[3]{2} > \sqrt{2}$  ed elevando a potenza 6 si ha  $4 > 8$ .

Data l'evidente falsità di quest'ultima disuguaglianza risulta che  $-\sqrt[3]{2} \in ]-\sqrt{2}, 0[$  per cui non è soddisfatta la prima ipotesi del teorema: il teorema di Lagrange non è perciò applicabile.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Poniamo  $l_1 = a + 2x$ ,  $l_2 = a - x$ ,  $l_3 = 2a - x$  con il parametro  $a$  e la variabile  $x$  che potranno assumere qualsiasi valore positivo ( $a > 0$  e  $x > 0$ ). Difatti il testo introduce queste grandezze come delle (misure di) lunghezze ossia come grandezze che comunemente sono definite positive. Affinché  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  possano essere le misure delle lunghezze dei lati di un triangolo non degenero, cioè di un triangolo che non degeneri in un punto o in un segmento, dovrà essere innanzitutto

$$\begin{cases} l_1 > 0 \\ l_2 > 0 \\ l_3 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Soddisfatto questo sistema, per i lati di un triangolo qualsiasi deve valere la disuguaglianza triangolare in conseguenza della quale la somma delle lunghezze di due lati dev'essere maggiore o uguale al terzo. Viceversa, non sarebbe possibile costruire il triangolo: si pensi ad esempio a segmenti di lunghezze pari a 10, 1, 2. Con tale terna non si potrà certo costruire un triangolo in quanto  $2 + 1 < 10$ . Poiché la disuguaglianza triangolare deve valere per qualsiasi permutazione dei tre lati di un triangolo ossia \*

$$l_1 + l_2 > l_3 \quad \wedge \quad l_2 + l_3 > l_1 \quad \wedge \quad l_3 + l_1 > l_2,$$

le ulteriori condizioni da aggiungere alle precedenti sono

$$\begin{cases} (a + 2x) + (a - x) > 2a - x \\ (a - x) + (2a - x) > a + 2x \\ (2a - x) + (a + 2x) > a - x. \end{cases} \quad (2)$$

Dal sistema (1) discende

$$\begin{cases} a + 2x > 0 \\ a - x > 0 \\ 2a - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > -a/2 \\ x < a \\ x < 2a \\ x > 0 \end{cases}$$

Supposto come detto,  $a > 0$ , il sistema è risolto dai valori dell'intervallo  $0 < x < a$  (fig. 1).

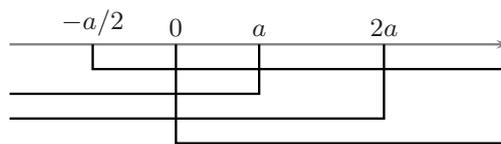


Fig. 1.

Il sistema (2) ammette invece le soluzioni

$$\begin{cases} 2a + x > 2a - x \\ 3a - 2x > a + 2x \\ 3a + x > a - x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x > 0 \\ -4x > -2a \\ 2x > -2a \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x < a/2 \\ x > -a \end{cases}$$

\* Ringrazio lo studente Daniele Angella per avermi fatto notare un errore sfuggitomi nella prima stesura del testo di questa soluzione.

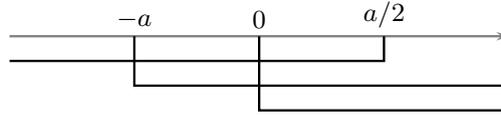


Fig. 2.

da cui  $0 < x < a/2$  (fig. 2).

In definitiva perché sussista un triangolo non degenere le condizioni a carattere geometrico implicano che dev'essere  $a > 0$  e  $0 < x < a/2$ .

b) Per determinare gli estremi dell'area del triangolo, dovremo esprimere l'area in funzione della variabile  $x$ . Poiché i lati sono assegnati, conviene rifarsi alla formula di Erone che fornisce l'area in base alla lunghezza dei lati e del semiperimetro  $p$

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_3)}.$$

Risulta

$$2p = l_1 + l_2 + l_3 \quad 2p = (a + 2x) + (a - x) + (2a - x) = 4a.$$

Notiamo inoltre che la positività dei fattori coinvolti nel radicando della formula di Erone è assicurata dalla disuguaglianza triangolare. Difatti il termine  $p - l_1$ , per esempio, si riscrive come

$$\begin{aligned} p - l_1 &= \left( \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} \right) - l_1 \\ &= \frac{l_1 + l_2 + l_3 - 2l_1}{2} \\ &= \frac{l_2 + l_3 - l_1}{2} \end{aligned}$$

e dato che sussiste la disuguaglianza  $l_2 + l_3 > l_1$  tale termine risulta certamente positivo. Analogamente per gli altri fattori. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \sqrt{2a(2a - a - 2x)(2a - a + x)(2a - 2a + x)} \\ &= \sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)} \quad x \in \left] 0, \frac{a}{2} \right[. \end{aligned}$$

Per individuare gli estremi di  $\mathcal{A}(x)$  calcoliamone la derivata e il relativo segno.

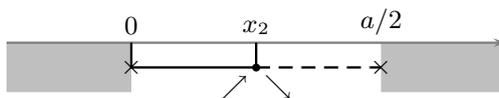
$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(x) &= \frac{2a(a - 2x)(a + x) + 2ax(-2)(a + x) + 2ax(a - 2x)}{2\sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{\dots}} \cdot (a^2 + ax - 2ax - 2x^2 - 2ax - 2x^2 + ax - 2x^2) \\ &= \frac{a(-6x^2 - 2ax + a^2)}{\sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)}} \end{aligned}$$

Posto  $\mathcal{A}'(x) \geq 0$  otteniamo l'equazione  $-6x^2 - 2ax + a^2 \geq 0$ : essendo le radici dell'equazione associata

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 6a^2}}{-6}$$

e, dopo aver posto

$$x_1 = a \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{6} \right) \approx -0,60a \quad x_2 = a \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{6} \right) \approx 0,27a,$$



**Fig. 3.**

le soluzioni della disequazione risultano espresse dalle condizioni  $x_1 \leq x \leq x_2$ , intervallo che va intersecato con le condizioni di esistenza già discusse. Il grafico del segno della derivata prima è riassunto dalla fig. 3 che mette in luce come in corrispondenza di  $x_2$  l'area assuma valore massimo. Fra i triangoli studiati ne esiste pertanto solo uno di area massima mentre, poiché l'intervallo di variabilità della  $x$  è aperto, non vi possono essere minimi. L'estremo inferiore di  $\mathcal{A}(x)$  risulta invece lo zero essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(x) = 0.$$

c) Se  $x = \frac{a}{4}$  discende che  $l_1 = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$ ,  $l_2 = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$ ,  $l_3 = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7}{4}a$  e poiché

$$l_1 + l_2 > l_3 \quad \text{in quanto} \quad \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}a > \frac{7}{4}a,$$

esiste certamente il triangolo annunciato dal testo.

Per costruirlo è sufficiente tracciare il segmento di lunghezza  $\overline{BC} = \frac{7}{4}a$  (fig. 4) e quindi, tramite il compasso, tracciare due circonferenze di centro  $B$  e  $C$  e di raggio rispettivamente pari a  $\frac{3}{2}a$  e  $\frac{3}{4}a$ .

I loro punti di intersezione, simmetrici rispetto al segmento di partenza, definiscono il terzo vertice, per esempio  $A$  in figura, del triangolo.

Per stabilire il valore dell'angolo corrispondente a questo terzo vertice,  $\angle BAC$ , applichiamo il teorema di Carnot in quanto sono noti tutti e tre i lati di  $\triangle BAC$ .

Ne segue

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{CA} \cos \angle BAC$$

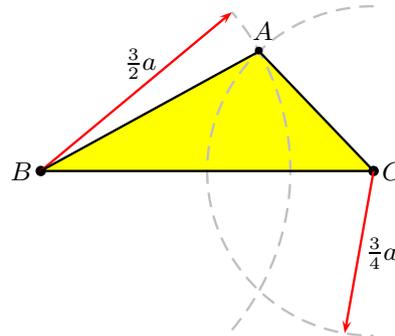


Fig. 4. Costruzione del triangolo.

che diventa

$$\left(\frac{7}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a\right) \cos \angle BAC$$

Si ottiene quindi

$$\frac{4}{16}a^2 = -\frac{9}{4}a^2 \cos \angle BAC \implies \cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$$

per cui, passando all'inversa del coseno (angoli maggiori di  $\pi$ , ovviamente, non vanno considerati)

$$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{1}{9}\right) \approx 96^\circ.$$

Essendo  $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$  il  $\triangle BAC$  è ottusangolo.

d) Posto  $\overline{AD} = a$ , l'angolo richiesto è quello formato dalla perpendicolare a  $BC$  condotta da  $D$  nel punto  $H$  e dal segmento  $AH$ , altezza di  $\triangle ABC$  rispetto alla base  $BC$  (fig. 5). Per determinarlo è sufficiente trovare  $\overline{AH}$  e quindi risolvere l'equazione

$$\operatorname{tg} \angle AHD = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} \quad (3)$$

nell'incognita  $\beta = \angle AHD$ .

Analogamente a quanto fatto nel punto precedente per l'angolo  $\angle BAC$ , determineremo con il teorema di Carnot  $\gamma = \angle ABC$  e di conseguenza la misura dell'altezza  $AH$ . Pertanto

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos \gamma$$

dalla quale, ricordando che  $\overline{AB} = \frac{3}{2}a$  e  $\overline{BC} = \frac{7}{4}a$  si ottiene

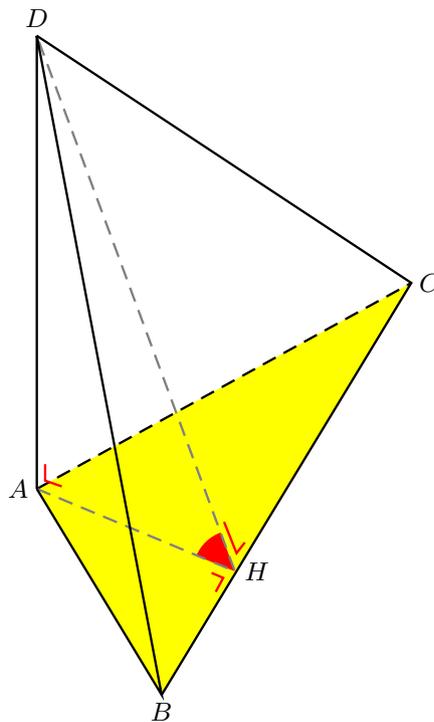


Fig. 5. Piramide retta

$$\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{7}{4}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right) \cdot \left(\frac{7}{4}a\right) \cos \gamma$$

cioè

$$\frac{9}{16}a^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{49}{16}a^2 - \frac{21}{4}a^2 \cos \gamma \quad \frac{21}{4} \cos \gamma = \frac{76}{16} \quad \cos \gamma = \frac{76}{84}.$$

Per le relazioni goniometriche intercorrenti tra cateti e ipotenusa in un triangolo rettangolo sia ha che

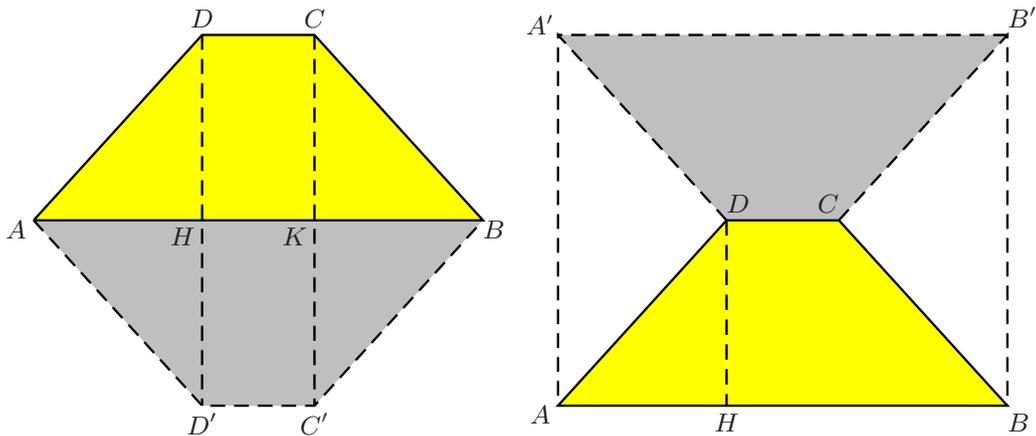
$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AB} \operatorname{sen} \gamma = \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{3}{2}a \sqrt{1 - \left(\frac{76}{84}\right)^2} = \frac{3}{2}a \sqrt{\frac{1280}{84^2}} \end{aligned}$$

e, dopo le opportune semplificazioni, si ha  $\overline{AH} = \frac{a}{7} \sqrt{20} = \frac{2a}{7} \sqrt{5}$ . Riprendendo infine la (3) deduciamo

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = a : \left( \frac{2a}{7} \sqrt{5} \right) \implies \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

ossia  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{7\sqrt{5}}{10} \approx 57,42^\circ$  che, a meno di un grado come richiesto dal testo, diviene  $\beta \approx 57^\circ$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)



**Fig. 1.** I due solidi di rotazione.

Le due situazioni sono rappresentate nella fig. 1. Si conosce che  $\overline{AB} = 4\overline{CD}$ . Posto quindi, per semplicità di scrittura,  $\overline{CD} = x$  e  $\overline{DH} = y$  esprimiamo in termini di queste variabili (ovviamente positive) il volume di ciascuno dei due solidi di rotazione proposti dal testo.

Nel primo caso il volume si esprime come

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= 2\mathcal{V}(\text{cono } AD'D) + \mathcal{V}(\text{cilindro } DD'C'C) \\ &= 2 \left( \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \pi \overline{DH}^2 \right) + \pi \overline{DH}^2 \cdot \overline{HK} \end{aligned}$$

mentre nel secondo diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}(\text{cilindro } ABB'A') - 2\mathcal{V}(\text{cono } ADA') \\ &= \pi \overline{DH}^2 \cdot \overline{AB} - 2 \left( \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \pi \overline{DH}^2 \right) \end{aligned}$$

Per determinare le altezze dei due coni è sufficiente, in entrambi i casi, notare che

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} (\overline{AB} - \overline{CD}) = \frac{1}{2} (4x - x) = \frac{3}{2} x$$

e che  $\overline{HK} = \overline{CD}$ .

Ne segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x \cdot \pi y^2 \right) + \pi y^2 \cdot x = \pi y^2 x + \pi y^2 x = 2\pi y^2 x \\ \mathcal{V}_2 &= \pi y^2 \cdot (4x) - 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x \cdot \pi y^2 \right) = 4\pi y^2 x - \pi y^2 x = 3\pi y^2 x\end{aligned}$$

Il loro rapporto è allora

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{2\pi y^2 x}{3\pi y^2 x} = \frac{2}{3}.$$

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Il tetraedro è un poliedro con quattro facce “equilatera”. Difatti le facce di questo poliedro (assieme al cubo, all’ottaedro, al dodecaedro e all’icosaedro, uno dei cinque poliedri regolari o platonici) sono costituite da quattro triangoli equilateri congruenti (fig. 1). Il tetraedro può quindi essere considerato come una piramide regolare retta avente per base un triangolo equilatero.

Sia  $l$  il lato dei quattro triangoli equilateri e calcoliamone l’area totale e il volume. Posta pari ad  $\mathcal{A}_t$  l’area di un triangolo equilatero di lato  $l$ , è immediato determinare l’area totale

$$\mathcal{A} = 4 \cdot \mathcal{A}_t = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot l \right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \sqrt{3} l^2.$$

L’espressione ottenuta mostra quanto ci si poteva aspettare senza un calcolo esplicito e cioè come l’area sia proporzionale al quadrato del lato  $l$ . Ci aspettiamo quindi che pure per il volume esista una analoga proporzionalità ovviamente, per ragioni dimensionali, con  $l^3$ .

Difatti l’altezza del tetraedro rispetto alla base si può dedurre considerando il triangolo di vertici  $VBA$  (fig. 1) dove  $B$  rappresenta il piede dell’altezza alla base nonché baricentro di quest’ultima. Ricordando che questo punto divide la mediana, che in un triangolo equilatero coincide con l’altezza, in parti una doppia dell’altra, abbiamo che  $\overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{1}{\sqrt{3}} l$  da cui, per il teorema di Pitagora,

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3} l^2} = l \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il volume che ne discende è

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_t \cdot \overline{VB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot l \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} \sqrt{2} l^3,$$

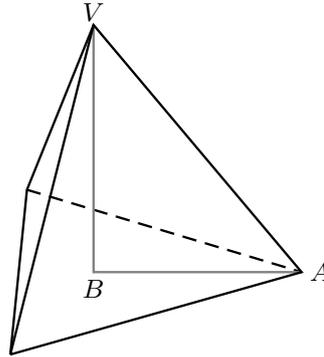


Fig. 1. Tetraedro.

espressione che conferma le aspettative di proporzionalità con  $l^3$ .

Poiché il testo del quesito pone il rapporto tra le aree di due tetraedri pari a  $A'/A'' = 2$ , per quanto dimostrato sopra dev'essere

$$\frac{A'}{A''} = 2 \implies \frac{(l')^2}{(l'')^2} = 2 \implies \frac{l'}{l''} = \sqrt{2}.$$

In definitiva il rapporto tra volumi è pertanto

$$\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}''} = \frac{(l')^3}{(l'')^3} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}.$$

Evidentemente si poteva arrivare al medesimo risultato semplicemente supponendo le proporzionalità

$$\mathcal{A} \propto l^2 \quad \mathcal{V} \propto l^3,$$

evitando così la dimostrazione esplicita delle espressioni dell'area totale  $\mathcal{A}$  e del volume  $\mathcal{V}$  del tetraedro.

### Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Se, per ipotesi, è

$$a > b \wedge c > d \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

segue pure

$$a > b \wedge -c < -d,$$

avendo moltiplicato per  $-1$  la seconda disuguaglianza. Leggendo la  $-c < -d$  da destra verso sinistra e riscritte le precedenti come

$$a > b \wedge -d > -c,$$

si può, in base alle proprietà fondamentali delle disuguaglianze tra numeri reali, sommare membro a membro e ottenere

$$a + (-d) > b + (-c) \implies a - d > b - c$$

che evidenzia come la risposta corretta sia la b).

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Ricordato che le medie aritmetica e geometrica di due numeri sono, rispettivamente date da

$$\text{media aritmetica: } \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{media geometrica } \sqrt{x_1 \cdot x_2},$$

supponiamo coerentemente con l'affermazione riportata nel quesito, che sia

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0. \end{cases}$$

Essendo entrambi i membri della prima disuguaglianza positivi, possiamo elevare al quadrato ed ottenere

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} > x_1 x_2 \quad \text{dalla quale} \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 > 4x_1 x_2$$

ossia

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 > 0 \quad \text{che si può riscrivere come} \quad (x_1 - x_2)^2 > 0.$$

Ora quest'ultima, nel caso che sia  $x_1 = x_2$ , può pure essere nulla diversamente da quanto supposto inizialmente. Pertanto l'affermazione del quesito è falsa mentre l'enunciato corretto è che *“la media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore o uguale della loro media geometrica”*. Si veda per un'ulteriore dimostrazione la discussione del [quesito 1](#) assegnato nei corsi sperimentali PNI.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Dobbiamo determinare due numeri  $a$  e  $b$  in modo che la relazione

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità cioè valga per ogni  $x$  appartenente al dominio dell'espressione a primo membro ossia  $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ . Questa implica che sia  $x \neq -1$  e  $x \neq 3$ . In tali ipotesi, possiamo moltiplicare entrambi i membri per il minimo comune denominatore  $(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$  ottenendo

$$1 = a(x + 1) + b(x - 3) \implies 1 = x(a + b) + (a - 3b).$$

Abbiamo in tal modo ricondotto l'espressione iniziale all'uguaglianza di due polinomi. Essendo questi ridotti a forma normale, il principio di identità dei polinomi assicura che due polinomi sono identici se i coefficienti delle potenze dello stesso grado sono uguali. Ne segue che dev'essere

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b \\ -b - 3b = 1 \end{cases}$$

In definitiva, otteniamo facilmente che la relazione di partenza è un'identità se  $a = 1/4$  e  $b = -1/4$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché la funzione  $f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5$  sviluppata si riduce ad un polinomio di 12° grado, sappiamo che i polinomi rappresentano funzioni continue in tutto  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo chiuso  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ . La funzione rientra nelle ipotesi del teorema di Weierstrass, *ogni funzione continua su un insieme chiuso e limitato è limitata e assume un valore massimo e minimo assoluti*: pertanto la  $f$  ammette certamente un massimo e un minimo assoluti.

In modo solo leggermente diverso, possiamo notare che essendo  $x \geq \frac{1}{2}$ , il primo fattore risulta  $(2x - 1)^7 \geq 0$ , annullandosi per  $x = \frac{1}{2}$ . Analogamente  $(4 - 2x)^5 \geq 0$  per  $x \leq 2$ , annullandosi in  $x = 2$ .

La funzione  $f$ , nell'intervallo assegnato, appare il prodotto di due fattori positivi in tutti i punti distinti dagli estremi dell'intervallo, dove si annulla. Il minimo non potrà che essere lo zero raggiunto negli estremi mentre il massimo, la cui esistenza è, ancora, assicurata dal teorema di Weierstrass, si avrà in corrispondenza di (almeno) un punto interno.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f$  di variabile reale  $x$ , è rappresentata dall'integrale definito

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad x > 0,$$

dove la variabile indipendente appare negli estremi di integrazione.

Se  $a$  è una qualsiasi costante positiva, per l'additività dell'integrazione definita, l'integrale originario si può riscrivere

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt = \int_x^a \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt = -\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt,$$

dove si è pure applicata la proprietà dello scambio degli estremi di integrazione e le sue conseguenze sul segno dell'integrale.

Poiché, per il teorema di Torricelli–Barrow, la derivata della funzione integrale risulta essere la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore dell'integrale supposto costante l'estremo inferiore, la derivata di  $f(x)$  risulta

$$\begin{aligned} D[f(x)] &= D \left[ -\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt \right] \\ &= -D \left[ \int_a^x \ln t \, dt \right] + D \left[ \int_a^{x+1} \ln t \, dt \right] \\ &= -\ln x + \ln(x+1) = \ln \left( \frac{x+1}{x} \right). \end{aligned}$$

In alternativa a quanto sopra, si poteva giungere allo stesso risultato anche con la risoluzione esplicita dell'integrale. Applicando a quest'ultimo il metodo di integrazione per parti con  $\ln x$  come fattore finito, si ha

$$\int \ln t \, dt = t \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t \, dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + \text{cost.}$$

Pertanto la  $f(x)$  diviene

$$\begin{aligned} f(x) &= [t \ln t - t + \text{cost.}]_x^{x+1} \\ &= (x+1) \ln(x+1) - (x+1) - (x \ln x - x) \\ &= (x+1) \ln(x+1) - x \ln x - 1, \end{aligned}$$

e la sua derivazione conduce facilmente al medesimo risultato

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln \left( \frac{x+1}{x} \right).$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché per ipotesi la funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso  $[1, 3]$  e derivabile nei suoi punti interni  $(1, 3)$  (oppure  $]1, 3[$ ), ad essa risulta applicabile il **teorema di Lagrange** (o del valor medio) che assicura l'esistenza di (almeno) un punto  $c \in (1, 3)$  tale

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \quad 1 < c < 3.$$

Dalle ulteriori due ipotesi  $f(1) = 1$  e  $0 \leq f'(x) \leq 2$  per ogni  $x$  di  $(1, 3)$  discende

$$0 \leq \frac{f(3) - 1}{3 - 1} \leq 2$$

dalla quale si ricava subito

$$0 \leq f(3) - 1 \leq 4 \implies 1 \leq f(3) \leq 5$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per poter individuare il luogo rappresentato dall'equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

va innanzitutto definito il dominio ponendo le condizioni di esistenza delle due radici quadrate

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Dato che la seconda equivale alla  $x^2 - 1 \leq 0$ , le uniche soluzioni del sistema si hanno quando  $x^2 - 1 = 0$  ossia in corrispondenza di  $x = \pm 1$  dove risulta pure  $y = 0$ . Il luogo cercato è pertanto individuato dai soli due punti  $A(-1, 0)$  e  $B(1, 0)$  e la risposta corretta è la b).

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La continuità della funzione reale di variabile reale  $f(x)$  in  $\mathbb{R}$  assicura l'esistenza dei due integrali definiti

$$\int_0^1 f(x) dx = a \quad \int_0^6 f(x) dx = b.$$

Volendo determinare  $a$  e/o  $b$  e supposta la validità di

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4,$$

si cercherà di esprimere i primi membri in funzione degli integrali incogniti  $a$  e  $b$ . Partendo dal primo di questi due integrali, cambiamo variabile di integrazione ponendo  $2x = t$ . Ne discende

$$x = \frac{t}{2} \quad dx = \frac{1}{2} dt,$$

mentre gli estremi diventano, se  $x = 0$ ,  $t = 0$  e se  $x = 3$ ,  $t = 6$ . L'integrale si può riscrivere come

$$\int_0^3 f(2x) dx = \int_0^6 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \ln 2 \implies \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \ln 2.$$

Considerando che la variabile  $t$  è muta, a primo membro è possibile riconoscere l'integrale incognito  $b$ . Ne segue

$$\frac{1}{2} \cdot b = \ln 2 \quad \text{e quindi ottenere il valore} \quad b = 2 \ln 2.$$

Procediamo nello stesso modo riscrivendo l'integrale a primo membro di

$$\int_1^3 f(2x) \, dx = \ln 4$$

in termini di  $a$  e/o  $b$ . Con la medesima sostituzione  $2x = t$ , gli estremi diventano, se  $x = 1$ ,  $t = 2$ , se  $x = 3$ ,  $t = 6$ , cosicché

$$\int_1^3 f(2x) \, dx = \int_2^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} \, dt = \ln 4.$$

Utilizzando la proprietà di addittività dell'integrale definito, considerando lo zero come terzo estremo di integrazione, l'uguaglianza precedente si riscrive

$$\frac{1}{2} \int_2^6 f(t) \, dt = \frac{1}{2} \left[ \int_2^0 f(t) \, dt + \int_0^6 f(t) \, dt \right] = \ln 4$$

che, scambiati gli estremi di integrazione nel primo addendo, implica

$$-\frac{1}{2} \int_0^2 f(t) \, dt + \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) \, dt = \ln 4.$$

Per le posizioni iniziali e il risultato già ottenuto, questa equazione diviene

$$-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = \ln 4 \quad \implies \quad -\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} (2 \ln 2) = \ln 4$$

da cui

$$-\frac{1}{2} a = \ln 4 - \ln 2 \quad \implies \quad -\frac{1}{2} a = \ln \frac{4}{2} \quad \implies \quad a = -2 \ln 2.$$

Gli integrali incogniti quindi esistono e valgono rispettivamente  $a = -2 \ln 2$  e  $b = 2 \ln 2$ .

# ESAME 2002 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Due numeri  $x$  e  $y$  hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale  $a$  non nullo. Riferito il piano ad un sistema  $S$  di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche  $(x, y)$ :

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di  $a$ ;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo  $\gamma$  dei punti  $P(x, y)$  che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in  $S$  sia la curva  $\gamma$  che la curva  $\gamma'$  simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da  $\gamma$  e da  $\gamma'$  e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli  $y$  nel caso che  $x$  sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Soluzione

## • Problema n. 2

I raggi  $OA = OB = 1$  metro tagliano il cerchio di centro  $O$  in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

- 1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono  $C$  di volume massimo, il valore  $V$  di tale volume

- massimo e il valore  $V'$  assunto in questo caso dal volume del secondo cono  $C'$ ;
- 2) la capacità complessiva, espressa in litri, di  $C$  e di  $C'$ ;
  - 3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono  $C$ , specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

Soluzione

**Questionario**

1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono  $n$ ?

Soluzione

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610–1685), amico di *Blaise Pascal*: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”

Soluzione

3. Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

Soluzione

4. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Soluzione

5. Cosa si intende per “funzione periodica”? Quale è il periodo di  $f(x) = -\sin \frac{\pi x}{3}$ ? Quale quello di  $\sin 2x$ ?

Soluzione

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio  $x^n + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ), se  $n$  è pari ha al più due radici reali, se  $n$  è dispari ha al più tre radici reali.

Soluzione

7. Data la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - 3x$$

calcolarne i limiti per  $x$  tendente a  $+\infty$  e  $-\infty$  e provare che esiste un numero reale  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  in cui la funzione si annulla.

Soluzione

8. Verificare che la funzione  $3x + \log x$  è strettamente crescente. Detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(3)$ .

Soluzione

9. Trovare  $f(4)$  sapendo che  $\int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$ .

Soluzione

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Le ipotesi date dal testo si traducono facilmente nelle equazioni

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \\ a \in \mathbb{R}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Evidentemente l'esistenza del rapporto implica che sia  $y \neq 0$  mentre l'ultima condizione ( $a \neq 0$ ) comporta pure  $x \neq 0$ . In sostanza la coppia di valori reali  $(0, 0)$  non è soluzione del sistema iniziale. Chiarito ciò possiamo riscrivere il sistema iniziale come

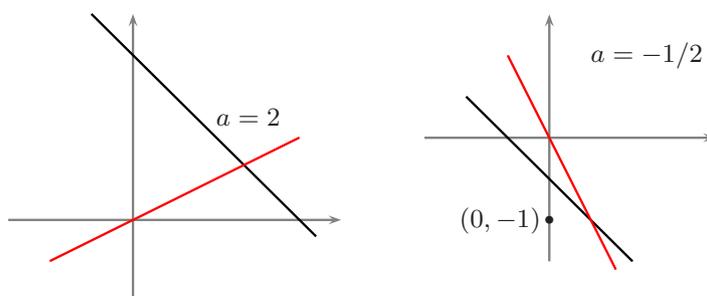
$$\begin{cases} y = -x + a \\ y = \left(\frac{1}{a}\right)x \\ x, y, a \in \mathbb{R}_0, \end{cases} \quad (2)$$

che si può interpretare graficamente nel sistema  $S$  come equivalente alla ricerca delle intersezioni di

1. un fascio di rette parallele (fascio improprio) di coefficiente angolare  $-1$  e termine noto  $a$ , con
2. un secondo fascio proprio con centro l'origine di  $S$  e coefficiente angolare  $\frac{1}{a}$ .

Le condizioni poste implicano che dal fascio improprio sia esclusa la retta passante per l'origine mentre in quello proprio è escluso l'asse delle ordinate. Possiamo ora discutere il problema trattando le diverse situazioni che si possono presentare.

Se  $a$  assume valori positivi esiste comunque una intersezione tra i due fasci appartenente al primo quadrante e se  $a \rightarrow +\infty$  il punto di intersezione tende ad allontanarsi dall'origine (fig. 1).

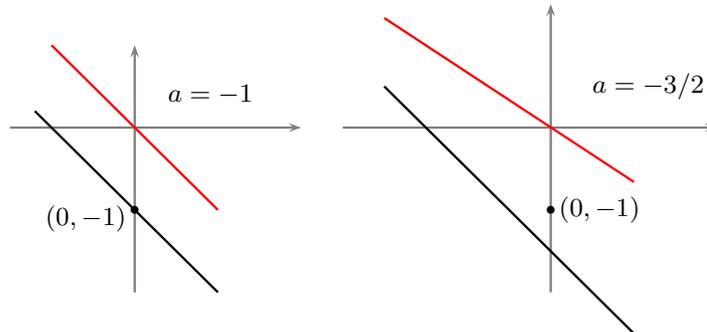


**Fig. 1.** Situazioni corrispondenti ad  $a = 2$  e  $a = -1/2$ .

Per  $-1 < a < 0$  il problema presenta ancora una soluzione rappresentata da un punto del IV quadrante che, al tendere di  $a$  a  $-1$ , possiede coordinate che assumono gli andamenti  $x \rightarrow +\infty$  e  $y \rightarrow -\infty$ . Questo comportamento discende dal fatto che la retta di equazione  $y = \frac{1}{a}x$  (in rosso nelle figg. 1, 2) tende a divenire parallela all'altra quando  $a \rightarrow -1^+$ . Se  $a = -1$  invece non vi possono essere punti di intersezione essendo le due rette parallele (fig. 2). Il sistema non ammette quindi soluzione.

Infine se  $a < -1$  (fig. 2) il problema possiede ancora una soluzione rappresentata da un punto nel II quadrante. Ancora, se  $a \rightarrow -1^-$ , risulta  $x \rightarrow -\infty$  e  $y \rightarrow +\infty$ . In definitiva il sistema (2) ammette una ed una sola soluzione per  $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ .

2. Notato che il sistema iniziale (1) si può pure interpretare come la rappresentazione parametrica del luogo  $\gamma$  dei punti  $P(x, y)$ , l'equazione cartesiana di questo



**Fig. 2.** Situazioni corrispondenti ad  $a = -1$  e  $a = -3/2$ .

luogo si determina eliminando il parametro  $a$  dal sistema. Pertanto, sostituendo  $a = x + y$  nella seconda equazione discende

$$\frac{x}{y} = x + y$$

da cui l'equazione richiesta

$$\gamma : y^2 + xy - x = 0, \quad x, y \neq 0. \quad (3)$$

Essendo di secondo grado in  $y$  e di primo in  $x$  conviene esplicitare quest'ultima variabile ed ottenere per il luogo  $\gamma$  l'espressione alternativa

$$\gamma : x = \frac{y^2}{1-y} \iff y \neq 0, 1. \quad (4)$$

3. Per ottenere l'equazione della curva  $\gamma'$ , simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, è sufficiente applicare all'equazione (4) la trasformazione

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

che sostanzialmente scambia il ruolo delle variabili: si ottiene

$$\gamma' : y' = \frac{x'^2}{1-x'}.$$

Se abbandoniamo gli indici, l'equazione si riscrive più opportunamente come

$$\gamma' : y = \frac{x^2}{1-x} \quad x \neq 0, 1.$$

Quest'ultima è ora rappresentativa di una funzione di variabile reale per cui per studiarne il grafico possiamo applicare i metodi dell'analisi. Determinato poi il

grafico di  $\gamma'$  possiamo ottenere, per simmetria, pure quello di  $\gamma$ . Va comunque osservato che l'equazione (3) è un caso particolare dell'equazione generale di una conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Poiché in riferimento a questa equazione, si hanno i seguenti tre casi:

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ : ellisse;
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ : parabola;
- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ : iperbole;

possiamo prevedere che, avendo  $\Delta = 1 > 0$ , la curva rappresentativa di  $\gamma$  (e  $\gamma'$ ) sarà un'iperbole.

• Studio del segno di  $\gamma'$ . Tenendo presente che in mancanza della condizione  $x \neq 0$  l'equazione rappresentativa si annullerebbe, risulta per i restanti valori del dominio,  $y > 0$  se  $1 - x > 0$  cioè se  $x < 1$ .

I limiti nei punti singolari e agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x = 1,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(-1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(-1 + \frac{1}{x})} = \mp\infty.$$

Dato quest'ultimo risultato, la funzione può quindi presentare un asintoto obliquo. Eseguita la divisione del polinomio  $x^2$  con  $1 - x$  si può riscrivere, identicamente

$$\gamma' : y = \frac{x^2}{1 - x} = -x - 1 + \frac{1}{1 - x}$$

che mette in evidenza la sua parte asintotica  $-x - 1$ . Formalmente poi, discende che il coefficiente angolare risulta

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(1 - x)} = -1$$

mentre il termine noto possiede il valore

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - (-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -1 + \frac{1}{1 - x} = -1.$$

L'asintoto obliquo è pertanto espresso dall'equazione  $a : y = -x - 1$ . Passando alla derivata prima si ottiene

$$y' = -1 + \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{x(2 - x)}{(1 - x)^2},$$

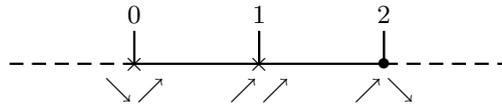


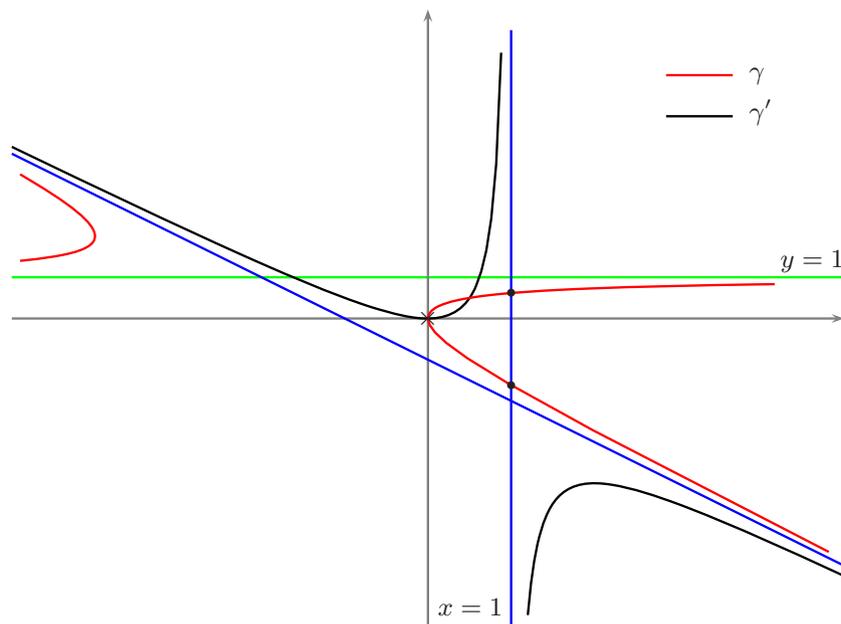
Fig. 3.

e la condizione  $y' \geq 0$  comporta che sia  $0 < x \leq 2$  con  $x \neq 1$ , cosicché la monotonia della funzione è riassunta in fig. 3.

Il calcolo della  $y''$  implica che sia

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{risultando } y'' > 0 \quad \text{se } x < 1.$$

Il grafico di  $\gamma'$  e il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante sono riportati in fig. 4 dove, per ragioni di opportunità grafica, non si sono rispettate le condizioni di monometricità richieste dal testo.

Fig. 4. Grafici di  $\gamma$  e  $\gamma'$  in un sistema non isometrico.

Va notato che l'origine è un punto non appartenente ad entrambe le curve: inoltre lo scambio di  $x$  e  $y$  non modifica l'equazione dell'**asintoto**  $a$  che pertanto risulta unito rispetto alla simmetria assiale  $\sigma$ . L'asintoto verticale di  $\gamma'$  di equazione  $x = 1$  (in blu nella fig. 4) diventa invece un asintoto orizzontale  $y = 1$  per  $\gamma$  (verde in fig. 4).

4. Rappresentiamo la regione finita di piano delimitata da  $\gamma$  e  $\gamma'$  in fig. 5. Per

individuare il punto di intersezione  $A$  tra le due curve e distinto dall'origine, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ y = x \end{cases}$$

in quanto  $A$ , dovendo appartenere sia a  $\gamma$  che a  $\gamma'$ , deve essere unito rispetto alla trasformazione assiale  $\sigma$ . Si ottiene facilmente che  $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Considerando ancora la simmetria rispetto alla retta bisettrice  $r : y = x$ , l'area richiesta sarà pari al doppio dell'area della regione limitata tra la bisettrice  $r$  e la curva  $\gamma'$  (in giallo in fig. 5).

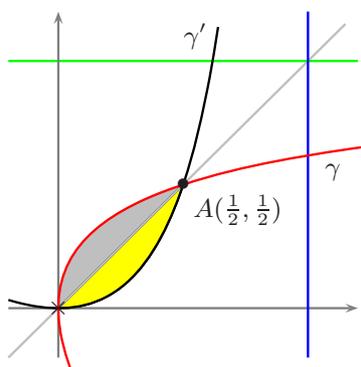


Fig. 5. Regione delimitata da  $\gamma$  e da  $\gamma'$ .

L'area  $\mathcal{A}$  è quindi espressa dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left( x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx$$

per cui, scomponendo la funzione integranda utilizzando la **seconda forma** per  $\gamma'$

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{1/2} \left( x + x + 1 - \frac{1}{1-x} \right) dx = 2 \int_0^{1/2} \left( 2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx,$$

l'integrazione si riduce ad integrali elementari e fornisce

$$\mathcal{A} = 2 [x^2 + x + \ln |x-1|]_0^{1/2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \approx 0,1137.$$

Il calcolo approssimato dell'integrale precedente si può condurre indifferentemente con uno dei due metodi elementari, quello dei rettangoli o quello dei trapezi (o di Bezout). Entrambi suddividono l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  in un numero  $n$  di intervallini di ampiezza uguale a  $h = (b-a)/n$ , di estremi  $x_i = h \cdot i + a$

e quindi, nel primo caso si calcola la funzione nel punto medio  $x_{M,i}$  dell' $i$ -esimo intervallino, nel secondo invece la si calcola agli estremi. Infine l'area totale è la somma delle aree dei rettangoli di dimensioni  $h$  e  $f(x_{i,M})$  (metodo dei rettangoli) oppure dei trapezi di altezza  $h$  e basi  $f(x_i)$ ,  $f(x_{i+1})$ . Ne risultano quindi le due formule

$$\mathcal{A} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{M,i}) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + \frac{h}{2}(2i+1)\right] \quad \text{metodo dei rettangoli}$$

oppure

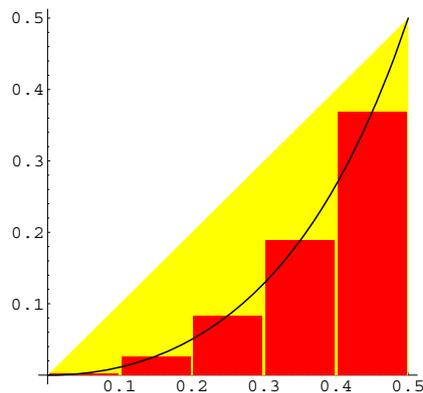
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1) + a] + f(hi + a)\} \quad \text{metodo dei trapezi} \end{aligned}$$

Applicheremo il primo metodo. Suddividiamo quindi l'intervallo  $[0, \frac{1}{2}]$  di ampiezza 0,5 in 5 intervallini di ampiezza  $h = 0,1$  e calcoliamo la funzione  $\gamma'$  nei punti medi  $x_{M,i} = \frac{0,1}{2}(2i+1)$ ,  $i = 0 \dots 4$ . Si ottengono i valori

$x_{M,i}$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45
$f(x_{M,i})$	0.00263	0.0265	0.083	0.188	0.368

e la rappresentazione di fig. 6. Il valore approssimato dell'area sottostante  $\gamma'$  è quindi dato dalla

$$\mathcal{A}' = 0.1(0.00263 + 0.0265 + 0.083 + 0.188 + 0.368) = 0.0669.$$



**Fig. 6.** Calcolo approssimato tramite la suddivisione in 5 intervalli.

Ne discende che la stima dell'area richiesta dal problema è

$$\mathcal{A}_s = 2 \left( \frac{1}{8} - 0.0669 \right) = 0.1162,$$

essendo  $\frac{1}{8}$  l'area del triangolo avente per base (e altezza) l'intervallo di integrazione (in giallo nella fig. 6).

Pur non richiesto dal testo, forniamo per completezza, degli spezzoni di codice sorgente che implementano nel linguaggio procedurale Pascal il calcolo dell'area sia con il metodo dei rettangoli che con quello dei trapezi.

```
{*****}
{definisce la funzione integranda}

FUNCTION FunzIntegranda(x: Real): Real;
BEGIN
    FunzIntegranda:= x*x/(1-x);
END;

{*****}
{applica il metodo dei rettangoli}

PROCEDURE SommaRettangoli( a,b      : Real    {IN};
                           n        : Integer {IN};
                           VAR Area : Real    {OUT});

VAR
    i: Integer;
    Ampiezza, Somma: Real;
BEGIN
    Somma:=0.0;
    Ampiezza:=Abs(b-a)/n;
    FOR i:=0 TO n-1 DO BEGIN
        Somma:=Somma+FunzIntegranda(a+Ampiezza/2*(2*i+1));
    END;
    Area:=Ampiezza*Somma;
END;

{*****}
{applica il metodo dei trapezi}

PROCEDURE SommaTrapezi( a,b      : Real    {IN};
                        n        : Integer {IN};
                        VAR Area : Real    {OUT});

VAR
    i: Integer;
    Ampiezza, Somma: Real;
BEGIN
    Somma:=0.0;
    Ampiezza:=Abs(b-a)/n;
    FOR i:=0 TO n-1 DO BEGIN
        Somma:=Somma +
            FunzIntegranda(Ampiezza*(i+1)+a)+FunzIntegranda(Ampiezza*i+a);
    END;
    Area:=(Ampiezza/2)*Somma;
```

END;

{\*\*\*\*\*}

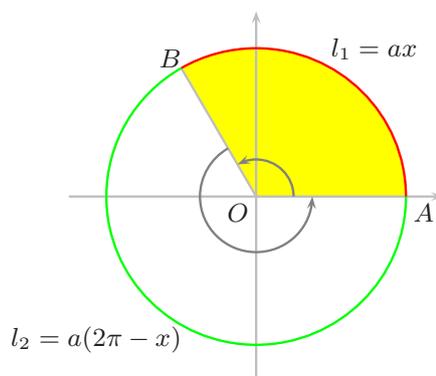
5. Riprendendo l'equazione (3) e posto in essa  $x = 1$ , le soluzioni di

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \text{sono} \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Interpretati sul piano cartesiano questi valori costituiscono le ordinate dei due punti di intersezione di  $\gamma$  con la retta di equazione  $x = 1$  (fig. 4). Il punto appartenente al primo quadrante possiede ordinata pari a  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  che è la sezione aurea dell'ascissa. Questo valore è inoltre il reciproco del *numero aureo*  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  che, a parte il segno, è pure l'ordinata dell'altro punto di intersezione.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

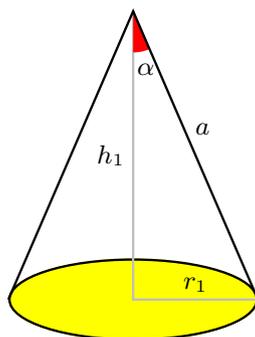
La situazione proposta dal testo è riassunta nella figura 1 dove si è introdotto il parametro dimensionale  $a = 1$  metro pari al raggio del cerchio, cosicché nelle deduzioni successive si potranno controllare, anche dal punto di vista dimensionale, i risultati ottenuti.



**Fig. 1.** Settori circolari e grandezze che li caratterizzano.

Se i settori evidenziati sono gli sviluppi piani della superficie laterale di due coni  $C$  e  $C'$ , significa che la lunghezza di ciascun arco che delimita il settore, si dovrà interpretare come la lunghezza della circonferenza di base dei coni mentre il raggio  $a$  costituirà l'apotema di ciascuno. Detta quindi  $x = \angle AOB$  l'ampiezza in radianti del primo settore, grandezza che evidentemente dovrà soddisfare alle condizioni  $0 \leq x \leq 2\pi$ , le lunghezze degli archi saranno  $l_1 = ax$  e  $l_2 = a(2\pi - x)$ . Ne segue che i raggi di base dei due coni saranno

$$r_1 = \frac{l_1}{2\pi} = \frac{ax}{2\pi} \quad r_2 = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}(2\pi - x).$$



**Fig. 2.** Cono circolare retto.

Essendo i coni retti (cioè con le altezze che cadono nel centro del cerchio di base), le rispettive altezze si ottengono con il teorema di Pitagora (fig. 2)

$$h_1 = \sqrt{a^2 - r_1^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ax}{2\pi}\right)^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

$$h_2 = \sqrt{a^2 - r_2^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - (2\pi - x)^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi x - x^2}.$$

Il volume  $\mathcal{V}$  del cono  $C$  è pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} h_1 (\pi r_1^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \cdot \pi \left(\frac{ax}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

mentre per  $C'$  riesce (sostituiamo  $\mathcal{V}'$  con  $\mathcal{V}_1$  onde non confondere con la derivata prima),

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} h_2 (\pi r_2^2) = \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot (2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (2)$$

Si tratta ora di determinare il valore di  $x$  in corrispondenza del quale si ottiene il volume  $\mathcal{V}$  massimo. Dato che l'espressione ottenuta non rappresenta una funzione elementare nota, calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{a^3}{24\pi^2} \left( 2x \sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot \frac{2x(4\pi^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

La condizione  $\mathcal{V}' \geq 0$  implica lo studio dei fattori  $x \geq 0$  e

$$8\pi^2 - 3x^2 \geq 0, \quad \text{quest'ultima risolta per } -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ne segue il segno complessivo

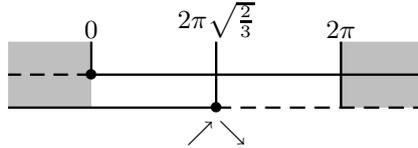


Fig. 3.

che mette in luce la presenza di un massimo in corrispondenza di  $x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ .  
I primi dati richiesti dal testo sono perciò:

$$\text{ampiezza: } x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{arco: } l_1(\text{max}) = ax_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ metri.}$$

Per ottenere il rapporto percentuale tra le aree cioè il valore  $\mathcal{A}(\text{sett.})/\mathcal{A}(\text{cerchio})$  dove l'area del settore è data dall'espressione

$$\mathcal{A}(\text{sett.}) = \frac{1}{2}a^2x_M.$$

Risulta

$$\frac{\mathcal{A}(\text{sett.})}{\mathcal{A}(\text{cerchio})} = \frac{\frac{1}{2}a^2x_M}{\pi a^2} = \frac{x_M}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

che in percentuale diviene  $\mathcal{A}(\text{settore})/\mathcal{A}(\text{cerchio}) \times 100 \approx 81,65 \%$ .

Calcoliamo infine i volumi in corrispondenza di  $x_M$  utilizzando le espressioni (1) e (2): si ha

$$\mathcal{V}_{\text{max}} = \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{4\pi^2 - 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} a^3 \approx 0,4031 \text{ metri}^3,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{a^3}{24\pi^2} \left( 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{4\pi \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3}} \\ &= \frac{a^3\pi}{3} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \right)} \approx 0,0347 \text{ metri}^3 \end{aligned}$$

2. Per le capacità espresse in litri è sufficiente tener presente che  $1 \text{ metro}^3 = 10^3$  litri per cui

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 0,4031 \text{ metri}^3 = 403,1 \text{ litri} \\ \mathcal{V}_1 &= 0,0347 \text{ metri}^3 = 34,7 \text{ litri.}\end{aligned}$$

3. L'angolo di apertura  $\alpha$  del cono  $C$  (fig. 2) si deduce per mezzo della tangente goniometrica è espresso da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_1}{h_1} = \frac{ax_M}{2\pi} : \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x_M^2},$$

da cui, introdotto il valore  $x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$  discende  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$  cioè  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ .

Per ottenere una stima numerica di tale angolo possiamo, per esempio, ridurre il problema all'applicazione di uno dei metodi numerici affrontati per la ricerca degli zeri di una funzione. Difatti posto  $f(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}$  dobbiamo cercare un valore di  $\alpha$ , evidentemente positivo e minore di  $90^\circ$  tale che si abbia  $y = 0$ . Il metodo più semplice è allora quello di bisezione che si fonda innanzitutto sull'ipotesi di continuità della funzione in un intervallo chiuso dove la funzione assume, agli estremi, valori di segno opposto. Si possono ovviamente applicare pure altri metodi come quello delle secanti o delle tangenti (o di Newton): tutti comunque richiedono di calcolare la funzione (e quindi la tangente) in punti di un certo intervallo.

Nel nostro caso l'intervallo iniziale contenente  $\alpha$  emerge immediatamente in quanto risulta

$$f(45^\circ) = 1 - \sqrt{2} < 0 \quad \text{così come} \quad f(60^\circ) = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0.$$

Come prima approssimazione dev'essere  $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Procedendo con "bisezione", calcoliamo poi la funzione nel punto medio di tale intervallo. Si ha

$$f\left(\frac{45^\circ + 60^\circ}{2}\right) = f(52,5^\circ) \approx 1,3032 - 1,4142 < 0,$$

per cui in seconda approssimazione dovrà essere  $52,5^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Procedendo ad una terza stima si ottiene:

$$f\left(\frac{52,5^\circ + 60^\circ}{2}\right) = f(56,25^\circ) \approx -1,7221 < 0;$$

Ne segue che la terza approssimazione (e qui ci fermiamo) implica  $56,25^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Nel sistema sessagesimale risulta in definitiva  $56^\circ 15' 00'' < \alpha < 60^\circ$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Dati due numeri positivi  $a$  e  $b$  la loro media aritmetica è

$$m_a = \frac{a+b}{2} \quad \text{mentre quella geometrica risulta} \quad m_g = \sqrt{a \cdot b}.$$

Per dedurre quale sia la maggiore partiamo dall'ipotesi che sia  $m_a > m_g$  e vediamo le conseguenze. Pertanto

$$m_a > m_g \quad \text{passando ai quadrati} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$$

e moltiplicando per 4, discende

$$a^2 + b^2 + 2ab > 4ab \quad \text{ossia} \quad a^2 + b^2 - 2ab > 0 \quad \text{cioè} \quad (a-b)^2 > 0,$$

disuguaglianza soddisfatta per tutti i valori positivi di  $a$  diversi da  $b$ . Potendo aversi anche  $a = b$ , il primo membro può di conseguenza essere nullo cosicché l'ipotesi iniziale va modificata: in generale vale perciò  $m_a \geq m_g$ .

La generalizzazione di tale medie a  $n$  numeri assegnati conduce invece alle seguenti espressioni:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

mentre per la media geometrica è

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},$$

dove, accanto al simbolo di sommatoria  $\sum$  si è introdotto il simbolo di prodotto  $\prod$ .

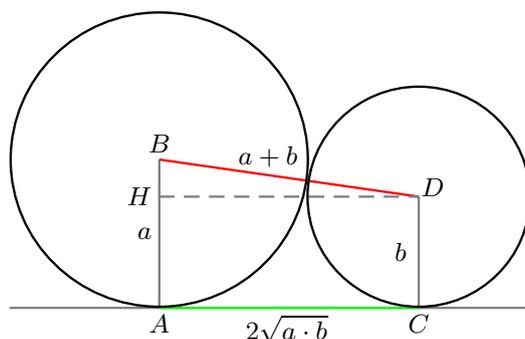
La disuguaglianza appena dimostrata possiede pure una immediata interpretazione geometrica. Siano  $a$  e  $b$  le misure dei raggi  $AB$  e  $CD$  di due circonferenze (fig. 1) tra di loro tangenti. Ciascuna circonferenza sia pure tangente alla retta comune  $AC$ .

Essendo  $\overline{BD} = a + b$ , l'applicazione del teorema di Pitagora comporta che sia

$$\overline{AC} = \overline{DH} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{a \cdot b}.$$

Poiché  $BD$  è l'ipotenusa di  $\triangle BHD$  rettangolo in  $H$  risulta  $\overline{BD} \geq \overline{AC}$  ossia  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , dove l'uguaglianza si presenta quando le due circonferenze possiedono il medesimo raggio. Dividendo infine per 2 questa disuguaglianza si ottiene la tesi

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{cioè} \quad m_a \geq m_g.$$



**Fig. 1.** Circonferenze di raggi  $a$  e  $b$  e confronto tra segmenti.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Evidentemente definiti gli eventi

$$E = \{\text{Esce il numero 1}\} \quad F = \{\text{Esce la coppia di numeri 1, 1}\},$$

si tratta di ottenere le seguenti probabilità:

- la probabilità che con 4 lanci di un dado si ottenga almeno una volta l'evento  $E$  ossia si abbia almeno un successo su 4 prove, ciascuna ripetuta nelle medesime condizioni e indipendentemente dalle prove precedenti;
- la probabilità che si presenti almeno una volta l'evento  $F$  in una serie di 24 prove con due dadi.

Lo schema da seguire in entrambi i casi è pertanto quello della distribuzione binomiale che considera eventi elementari di tipo Bernoulli ossia eventi che in una singola prova possono solo accadere (successo) o non accadere (insuccesso). Tale distribuzione permette di determinare la probabilità di ottenere  $k$  successi in un numero  $n$  di prove indipendenti e in ciascuna delle quali la probabilità di successo sia  $p$ .

Le probabilità per gli eventi elementari delineati dal problema in una singola prova sono, per il lancio con un dado

$$p(E) = \frac{1}{6} \quad p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

dove  $\overline{E}$  rappresenta l'evento complementare o contrario ossia l'uscita di un numero diverso da 1. Nel caso del lancio con due dadi si ha invece

$$p(F) = \frac{1}{36} \quad p(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Nel primo caso la probabilità di  $k$  successi in 4 prove è data da

$$p(4, k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

e nel secondo

$$p(24, k) = \binom{24}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-k}$$

Poiché si chiede che il numero di successi sia  $k \geq 1$  risulta

$$\begin{aligned} p(4, k \geq 1) &= \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-i} \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177 \end{aligned}$$

e dove si è sfruttato il completamento ad 1 dell'evento contrario. Analogamente

$$\begin{aligned} p(24, k \geq 1) &= \sum_{i=1}^{24} \binom{24}{i} \left(\frac{1}{36}\right)^i \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-i} \\ &= 1 - \binom{24}{0} \left(\frac{1}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-0} \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914 \end{aligned}$$

Risulta pertanto  $p(4, k \geq 1) > p(24, k \geq 1)$  e quindi appare “più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado che almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi.”

L'ultima disuguaglianza si può riportare equivalentemente ad un confronto tra logaritmi. Difatti supposto che sia  $p(4, k \geq 1) > p(24, k \geq 1)$  cioè

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 > 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

discende

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 < \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

per cui, prendendo i logaritmi si ottiene

$$4 \ln \frac{5}{6} < 24 \ln \frac{35}{36} \quad \text{ossia} \quad \ln 5 - \ln 6 < 6 \ln 35 - 12 \ln 6.$$

Scomposto in fattori 35 e utilizzate ancora le proprietà dei logaritmi si giunge quindi alla  $6 \ln 7 + 5 \ln 5 - 11 \ln 6 > 0$  che, un calcolo esplicito del primo membro ( $\approx 0,0133$ ) mostra essere corretta confermando la supposizione iniziale.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Assunto come “successo” l’esito in parità di una partita ed equiprobabili tutti i possibili esiti (X, 1, 2), la probabilità dell’evento “X” è  $p = 1/3$  mentre la probabilità che una partita non finisca in parità risulta evidentemente  $q = 1 - p = 2/3$ . Siamo perciò di fronte ad un evento elementare di tipo Bernoulli e la probabilità richiesta si può quindi identificare con la probabilità di avere 12 successi in 13 prove (le partite), ognuna delle quali viene svolta (giocata) indipendentemente dalle altre. In queste ipotesi la probabilità richiesta è descritta dalla distribuzione binomiale: si ha cioè

$$\begin{aligned} p(13, k = 12) &= \binom{13}{12} p^{12} q^{13-12} \\ &= \binom{13}{12} \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13-12} \\ &= 13 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \approx 1,6308 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Per calcolare il limite della successione a termini positivi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!},$$

notiamo che il termine generale si può scrivere come

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}^{n \text{ volte}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Sia il numeratore che il denominatore contengono ciascuno  $n$  fattori per cui, per l’associatività e commutatività della moltiplicazione i termini si possono raggruppare a coppie nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{3^n}{n!} &= \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}^{n \text{ volte}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ &= \left(\frac{3}{1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3}\right) \cdot (n - 4 \text{ fattori minori di } 1) \cdot \left(\frac{3}{n}\right) \end{aligned}$$

A questo punto in luogo di ogni fattore minore di 1 sostituiamo appunto l’unità ottenendo un’espressione che certamente risulta maggiore del termine iniziale: in definitiva

$$0 < \frac{3^n}{n!} < 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}^{n-4 \text{ fattori}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{2n} = 0$$

(e ovviamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ ), per il teorema del confronto dev'essere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Per definizione, una funzione  $f$  di dominio  $D$  si dice periodica di periodo  $T$  se e solo se, per  $\forall x \in D$  sussiste l'identità

$$f(x + kT) = f(x) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \wedge T \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Va notato che dev'essere  $x + kT \in D$  e che la funzione risulta periodica anche per ogni multiplo intero di  $T$ . Per tale motivo il valore minore  $T$  positivo, nell'insieme dei possibili periodi  $\{kT, k \in \mathbb{Z}\}$  cioè quello che corrisponde a  $k = 1$ , viene detto più precisamente, il *periodo principale* della funzione. Comunemente è questo valore che si ricerca in una funzione periodica.

Per determinare formalmente il periodo (principale)  $T$  di una funzione va quindi imposta l'identità sopra studiandone le possibili soluzioni nell'incognita  $T$ . Pertanto per individuare il periodo di  $f(x) = -\text{sen} \frac{\pi x}{3}$  cerchiamo una soluzione che soddisfi alla

$$-\text{sen} \left[ \frac{\pi(x+T)}{3} \right] = -\text{sen} \left( \frac{\pi x}{3} \right).$$

Da questa discende

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3} \right] = \text{sen} \left( \frac{\pi x}{3} \right)$$

per cui, a seguito della nota periodicità della funzione seno i due angoli devono differire per un multiplo del periodo cioè di  $2\pi$

$$\left( \frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3} \right) - \left( \frac{\pi x}{3} \right) = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Facilmente si deduce che

$$\frac{\pi T}{3} = 2\pi k \quad \text{ossia} \quad T = 6k.$$

Il periodo principale è quindi  $T = 6$ .  
Nello stesso modo si ha

$$\operatorname{sen} 2(x + T) = \operatorname{sen} 2x \implies \operatorname{sen}(2x + 2T) = \operatorname{sen} 2x,$$

per cui

$$(2x + 2T) - (2x) = 2\pi k \implies 2T = 2\pi k \implies T = k\pi$$

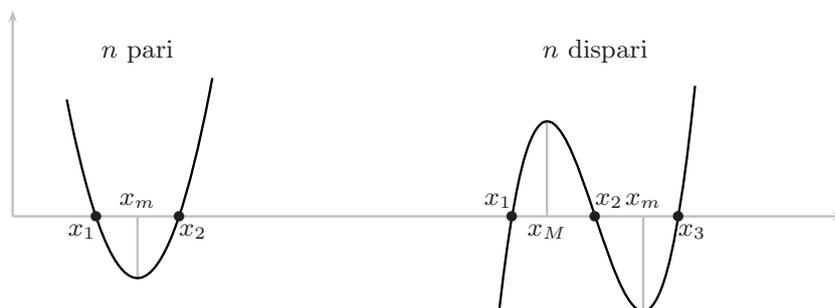
e il periodo principale è  $T = \pi$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Notato che il polinomio  $P(x) = x^n + px + q$  rappresenta una funzione continua e derivabile in tutto  $\mathbb{R}$ , supponiamo inizialmente che il suo grado  $n$  sia pari. In tal caso la derivata prima risulta espressa da un polinomio di grado  $n - 1$  dispari

$$P'(x) = nx^{n-1} + p \quad \text{e la disequazione} \quad P'(x) = nx^{n-1} + p \geq 0$$

ammette come soluzioni  $x \geq \sqrt[n-1]{-p/n}$ . Pertanto, per un corollario del teorema di Lagrange (piuttosto che tramite il teorema di Rolle),  $P(x)$  è sempre crescente quando  $x > x_m$  con  $x_m = \sqrt[n-1]{-p/n}$  mentre è decrescente per  $x < x_m$ . Se l'ordinata del punto di ascissa  $x_m$  è negativa,  $P(x_m) < 0$ , deve esistere per la continuità di  $P(x)$  un intervallo  $[x_1, x_2]$  dove  $P(x_1) = P(x_2) = 0$  con  $x_m \in ]x_1, x_2[$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Possibili grafici di  $P(x)$ .

In tale intervallo sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Rolle e quindi è verificata pure la sua tesi cioè  $P'(x_m) = 0$ . Esistono pertanto al più due radici (ma pure nessuna) che permettono di definire un intervallo dove applicare il teorema di Rolle al polinomio assegnato.

Nel caso si abbia  $n$  dispari la disequazione  $P'(x) \geq 0$  presenta a primo membro un polinomio di grado  $n - 1$  pari per cui

$$P'(x) = nx^{n-1} + p \geq 0 \implies x^{n-1} \geq -\frac{p}{n}.$$

Supposto che sia  $-p/n > 0$ , l'estrazione della radice pari  $(n-1)$ -esima comporta le soluzioni

$$|x| \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \implies x \leq -\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \vee x \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}.$$

Il segno della  $P'(x)$ , riassunto dalla fig. 2



Fig. 2.

implica l'esistenza di un massimo e di un minimo locali. Se quindi  $P(x_M) > 0$  e  $P(x_m) < 0$  cioè se l'ordinata del punto di massimo è positiva e quella del minimo negativa (fig. 1), dovranno esistere 3 valori  $x_1, x_2$  e  $x_3$  in corrispondenza dei quali  $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ . Gli intervalli entro i quali si verifica il teorema di Rolle saranno in tal caso  $[x_1, x_2]$  e  $[x_2, x_3]$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Noto l'andamento dell'esponenziale per  $x \rightarrow +\infty$  appare subito che il limite richiesto presenta una indeterminazione del tipo  $+\infty - \infty$ . Riscriviamo quindi il limite come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \sin x - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x} - 3 \right)$$

e risolviamo i limiti delle funzioni tra parentesi. Il primo addendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

è ancora indeterminato ( $\infty/\infty$ ) ma poiché esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

ottenuto eseguendo il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore, è applicabile il teorema di De L'Hôpital cosicché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Per il secondo addendo notiamo che valgono le disuguaglianze

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$$

in quanto  $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ . Poiché i limiti di  $\pm \frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$  sono nulli il teorema del confronto assicura che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

Da tutto ciò segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty$$

come pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty.$$

Se  $x \rightarrow -\infty$ , riscritta ancora la funzione come

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right)$$

e avendosi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \quad \text{ancora per il teorema del confronto,}$$

si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = 0 - 0 - 3 = -3.$$

Essendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , il limite richiesto risulta ancora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty.$$

Circa l'esistenza del numero reale  $\alpha$  è sufficiente calcolare la funzione agli estremi dell'intervallo  $[0, 1]$ . Difatti essendo

$$f(0) = e^0 - 0 - 0 = 1 > 0 \quad f(1) = e^1 - \operatorname{sen} 1 - 3 = e - \operatorname{sen} 1 - 3 < 0,$$

la funzione  $f$  assume valori di segno opposto agli estremi. Poiché  $f$  è pure una funzione continua in  $\mathbb{R}$  e quindi anche in  $[0, 1]$ , possiamo sfruttare il teorema, conseguenza del teorema di Weierstrass, d'esistenza degli zeri e che assicura l'esistenza in tali ipotesi di almeno un punto dove la funzione si annulla. Esiste quindi  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che  $f(\alpha) = 0$ .

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il dominio della funzione  $f(x) = 3x + \ln x$  (consideriamo logaritmi naturali) risulta evidentemente l'insieme  $\mathbb{R}_0^+$ . Per trovarne la monotonia calcoliamo la sua derivata prima  $f'(x)$  e studiamone il segno:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{che risulta soddisfatta per } \forall x > 0.$$

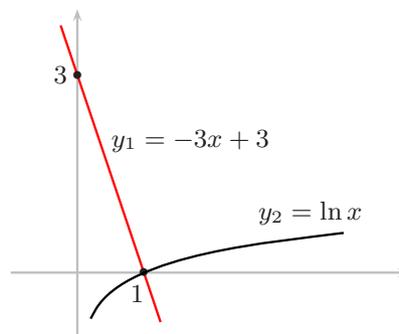
In base ad un corollario del teorema di Lagrange la funzione è monotona strettamente crescente nel suo dominio.

Esiste quindi la funzione inversa  $x = g(y)$  e la sua derivata si dimostra essere

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Poiché dal testo viene chiesta  $g'(3)$  cioè si assegna il valore della variabile  $y_0$  essendo  $y_0 = f(x_0)$ , si tratta di determinare il valore  $x_0$  in corrispondenza del quale è  $y_0 = 3$ : quindi si calcolerà  $f'(x_0)$ . Ciò equivale a risolvere l'equazione

$$3 = 3x + \ln x \quad \text{che può essere riscritta come} \quad -3x + 3 = \ln x.$$



**Fig. 1.** Confronto tra i grafici della retta  $y_1$  e del logaritmo  $y_2$ .

Assodato che, con un immediato confronto tra i grafici noti della retta  $y_1 = -3x + 3$  e del logaritmo  $y_2 = \ln x$  esiste certamente una soluzione  $x_0$  di tale equazione (fig. 1), questo valore risulta essere  $x_0 = 1$  ed emerge immediatamente appena si tracci con qualche cura il grafico della retta (che deve passare per i

punti  $(0, 3)$  e  $(1, 0)$  e quello del logaritmo (che pure interseca l'asse delle ascisse in  $(1, 0)$ ). Ne segue che

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il testo del quesito assegna esplicitamente la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$$

e chiede il calcolo in 4 della funzione integranda  $f(x)$ . Poiché queste due funzioni sono collegate dalla relazione

$$F'(x) = D \left( \int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$$

che riassume il teorema di Torricelli–Barrow, per ottenere  $f(x)$  basta eseguire la derivata della funzione integrale ossia

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(x \cos \pi x) = \cos \pi x + x(-\operatorname{sen} \pi x)\pi \\ &= \cos \pi x - \pi x \operatorname{sen} \pi x = f(x). \end{aligned}$$

Ne segue che  $f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \operatorname{sen} 4\pi = 1$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Fissato un punto  $C$  del piano e un numero reale  $k \in \mathbb{R}_0$ , la trasformazione che associa ad un punto  $P$  il punto  $P'$ , allineato con  $C$  e tale che sia

$$\frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = k$$

si definisce *omotetia di centro  $C$* .

Se introduciamo un riferimento cartesiano tale che sia  $C(a, b)$ ,  $P(x, y)$  e  $P'(x', y')$  la relazione  $\overline{CP'}/\overline{CP} = k$  assume, per il teorema di Talete, le forme

$$\frac{x' - a}{x - a} = k \quad \frac{y' - b}{y - b} = k,$$

cosicché le equazioni rappresentative di una omotetia di rapporto  $k$  risultano

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b \end{cases} \quad \text{oppure, più in generale} \quad \begin{cases} x' = kx + c \\ y' = ky + d, \end{cases}$$

con  $c = a(1 - k)$  e  $d = b(1 - k)$ . Come caso particolare, l'omotetia con centro l'origine degli assi e rapporto  $k$  è descritta analiticamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

In un'omotetia l'unico punto unito risulta il suo centro  $C$ . È poi facile mostrare come una retta passante per il centro sia una retta unita così come rette che non passino per il centro abbiano come immagini, rette ad esse parallele (per esempio,  $AD$  e  $A'D'$  in fig. 1). Ne segue che le figure corrispondenti in una omotetia sono simili: pertanto, in riferimento ancora alla figura 1, risulta  $\triangle ADB \sim \triangle A'D'B'$ . In questo caso, se il rapporto di omotetia è  $k$  le aree stanno nel rapporto  $k^2$ .

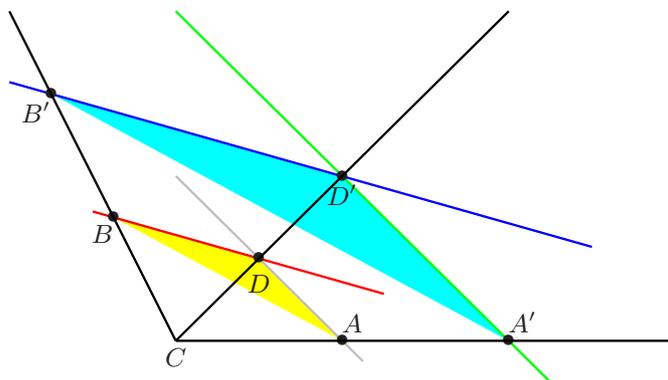


Fig. 1. Punti collegati da un'omotetia di centro  $C$ , rette unite e non.

Una similitudine è invece una trasformazione del piano in sè che a due punti distinti  $A$  e  $B$ , associa due punti  $A'$ ,  $B'$ , tali che il rapporto

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

con  $k$  grandezza costante assegnata. Il suo valore viene detto *rapporto di similitudine*. Le equazioni rappresentative di una similitudine sono

$$\begin{cases} x' = ax \pm by + c \\ y' = bx \mp ay + f \end{cases}$$

dove il rapporto di similitudine è dato dal valore assoluto del determinante della matrice

$$T = \begin{pmatrix} a & \pm b \\ b & \mp a \end{pmatrix} \quad k^2 = |\det T| = a^2 + b^2.$$

Poiché in una omotetia  $C \equiv C'$  la definizione di similitudine comprende come caso particolare le trasformazioni omotetiche. Queste trasformazioni si ottengono

pure dalle equazioni rappresentative di una similitudine supponendo che sia  $b = 0$ . Comunque le similitudini, diversamente dalle omotetie, associano a rette, rette corrispondenti che non sono in generale parallele. Per esempio, la similitudine  $s$  di equazioni

$$s : \begin{cases} x' = 2x - y - 1 \\ y' = x + 2y - 1 \end{cases}$$

e rapporto  $k = \sqrt{5}$ , associa ai punti  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$  e  $B(0, 1)$ , i punti  $O'(-1, -1)$ ,  $A'(3, 1)$  e  $B'(-2, 1)$  (fig. 2).

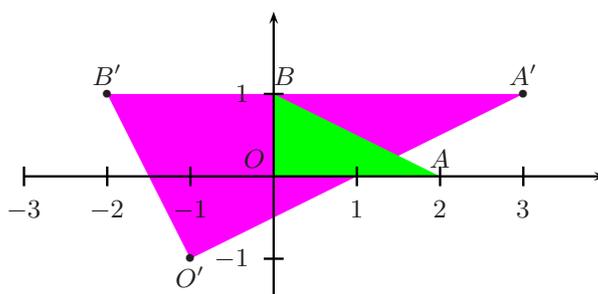


Fig. 2. Punti collegati da una similitudine.

È immediato notare che le rette che collegano punti corrispondenti, per esempio  $OA$  e  $O'A'$  non sono parallele, diversamente dall'esempio grafico portato per le omotetie. Pertanto, i triangoli che si corrispondono in una omotetia sono simili e possiedono i lati paralleli mentre i triangoli che si corrispondono tramite una similitudine non hanno necessariamente i lati paralleli (pur essendo simili).

Infine si può dimostrare che una similitudine di rapporto  $k$  può sempre essere espressa come la composizione di una isometria e di una omotetia nello stesso rapporto. Come esempio riscriviamo la similitudine sopra come composizione di una rotazione (isometria) e di una omotetia. Osserviamo quindi che per ottenere il parallelismo tra i lati di  $\triangle OAB$  con quelli di  $\triangle O'A'B'$  l'angolo  $\alpha$  della rotazione attorno all'origine deve soddisfare alla condizione  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  che rappresenta il coefficiente angolare della retta (ruotata)  $O'A'$  immagine di quella orizzontale  $OA$ . Ne segue che  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$  e  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Le equazioni della rotazione sono pertanto

$$r : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$$

L'omotetia di rapporto  $\sqrt{5}$  discende immediatamente in quanto basta porre

$$o : \begin{cases} x'' = \sqrt{5}x' - 1 \\ y'' = \sqrt{5}y' - 1 \end{cases}$$

per ottenere le equazioni della similitudine  $s$  come prodotto di  $r$  e  $o$  ossia esprimere  $s = o \circ r$ , come nelle intenzioni.

# ESAME 2003

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Si consideri un tetraedro regolare  $T$  di vertici  $A, B, C, D$ .

- Indicati rispettivamente con  $V$  ed  $S$  il volume e l'area totale di  $T$  e con  $r$  il raggio della sfera inscritta in  $T$ , trovare una relazione che leghi  $V$ ,  $S$  ed  $r$ .
- Considerato il tetraedro  $T'$  avente per vertici i centri delle facce di  $T$ , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di  $T$  e  $T'$  e il rapporto fra i volumi di  $T$  e  $T'$ .
- Condotto il piano  $\alpha$ , contenente la retta  $AB$  e perpendicolare alla retta  $CD$  nel punto  $E$ , e posto che uno spigolo di  $T$  sia lungo  $s$ , calcolare la distanza di  $E$  dalla retta  $AB$ .
- Considerata nel piano  $\alpha$  la parabola  $p$  avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A, B$  ed  $E$ , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di  $p$ .
- Determinare per quale valore di  $s$  la regione piana delimitata dalla parabola  $p$  e dalla retta  $EA$  ha area  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  cm<sup>2</sup>.

Soluzione

## • Problema n. 2

È assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + m + |m|}, \quad \text{dove } m \text{ è un parametro reale.}$$

- Determinare il suo dominio di derivabilità.

- b) Calcolare per quale valore di  $m$  la funzione ammette una derivata che risulti nulla per  $x = 1$ .
- c) Studiare la funzione  $f(x)$  corrispondente al valore di  $m$  così trovato e disegnarne il grafico  $\gamma$  in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di  $\gamma$  ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = 1$ .

Soluzione

### Questionario

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette  $x, y, z$ , due a due distinte, se  $x$  ed  $y$  sono sghembe e, così pure, se sono sghembe  $y$  e  $z$  allora anche  $x$  e  $z$  sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

Soluzione

3. Dal punto  $A$ , al quale è possibile accedere, è visibile il punto  $B$ , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza  $AB$ . Dal punto  $A$  si può però accedere al punto  $P$ , dal quale, oltre ad  $A$ , è visibile  $B$  in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza  $PB$ , è tuttavia possibile misurare la distanza  $AP$ . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che  $P$  non è allineato con  $A$  e  $B$ , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza  $AB$ .

Soluzione

4. Il dominio della funzione  $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:

- A)  $-1 < x \leq 3$ ; B)  $-1 \leq x < 3$ ; C)  $0 < x \leq 3$ ; D)  $0 \leq x < 3$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Soluzione

5. La funzione  $2x^3 - 3x^2 + 2$  ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

Soluzione

6. La derivata della funzione  $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$  è la funzione  $f'(x) = 2xe^{-x^4}$ . Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

Soluzione

7. Considerati i primi  $n$  numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

- A)  $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ; B)  $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ ;  
 C)  $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$ ; D)  $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

8.  $x$  ed  $y$  sono due numeri naturali dispari tali che  $x - y = 2$ . Il numero  $x^3 - y^3$ :
- A) è divisibile per 2 e per 3;
  - B) è divisibile per 2 ma non per 3;
  - C) è divisibile per 3 ma non per 2;
  - D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinque che contengono i numeri 1 e 90.

Soluzione

10. Il valore dell'espressione  $\log_2 3 \cdot \log_3 2$  è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

Le quattro facce di un tetraedro regolare sono costituite da quattro triangoli equilateri. Sia  $s$  la lunghezza degli spigoli o dei lati dei triangoli equilateri. Si ha subito che l'apotema  $\overline{DK}$  è pari a

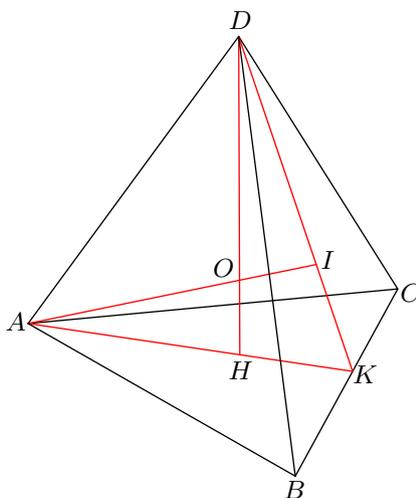
$$\overline{DK} = \overline{BC} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = s \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{AK}.$$

La sfera di centro  $O$ , inscritta nel tetraedro è tangente in  $H$  alla faccia  $ABC$  e in  $I$  alla faccia  $BCD$ . Questi due punti sono pure i piedi delle altezze condotte rispettivamente, dal vertice  $D$  alla faccia  $ABC$  e da  $A$  alla faccia  $BCD$ .  $H$  e  $I$  sono inoltre i baricentri di queste due facce e pertanto, essendo queste dei triangoli equilateri, suddividono le altezze (e mediane)  $AK$  e  $DK$  in due parti con rapporti

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{IK}} = 3.$$

Ne segue che

$$\overline{HK} = \frac{1}{3} \overline{AK} = \frac{s\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{s}{2\sqrt{3}}.$$

Fig. 1. Tetraedro  $ABCD$ .

L'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $\triangle DHK$  implica

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{DK}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{12}s^2} = s\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Infine, notata la similitudine tra  $\triangle DOI \sim \triangle DHK$  in quanto  $\angle DOI = \angle DHK = \pi/2$  mentre  $\angle HDK$  è in comune, si può impostare la proporzione

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{HK}}$$

e detto  $\overline{OI} = r$  il raggio della sfera inscritta, si ha  $\overline{DO} = \overline{DH} - r$  per cui

$$\frac{\overline{DH} - r}{r} = \left[ \frac{s\sqrt{3}/2}{s/(2\sqrt{3})} \right].$$

Sostituito il valore di  $\overline{DH}$  determinato precedentemente, l'ultima relazione fornisce

$$\frac{s}{r}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{s}{r}\sqrt{\frac{2}{3}} = 4 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

Trovato il legame tra spigolo e raggio della sfera inscritta, il volume  $\mathcal{V}$  e l'area totale  $\mathcal{S}$  del tetraedro assumono la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(\triangle ABC) \cdot \overline{DH} = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot \frac{s}{2} \right) \cdot \left( s\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \\ \mathcal{S} &= 4\mathcal{A}(\triangle ABC) = 4 \left( \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \right) = s^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

cosicché il loro rapporto risulta

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{s^3}{12} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{s^2 \sqrt{3}} = \frac{s}{12} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

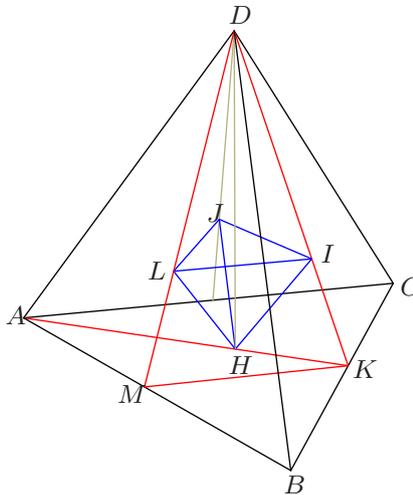
da cui, utilizzando la (1), discende

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{r}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V} = \frac{r}{3} \mathcal{S}$$

che lega, come richiesto,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{S}$  e  $r$ .

b) Il tetraedro  $T'$  ha vertici in  $H, I, J, L$ , e ciascuno di questi punti è il baricentro della faccia cui appartiene fig. 2. Al fine di ottenere il rapporto tra gli spigoli notiamo la similitudine tra  $\triangle DMK$  e  $\triangle DLI$  ( $LI$  è parallelo a  $MK$ ) per cui

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DI}}.$$



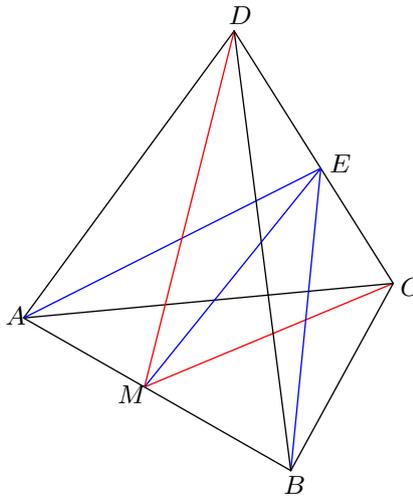
**Fig. 2.** Tetraedri  $ABCD$  e  $HIJL$ .

Essendo

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DI}} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{MK}}{\overline{LI}} = \frac{3}{2};$$

ma  $\overline{MK} = \overline{MB} = \overline{BK} = s/2$  e quindi

$$\overline{LI} = \frac{2}{3} \overline{MK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} = \frac{s}{3}.$$



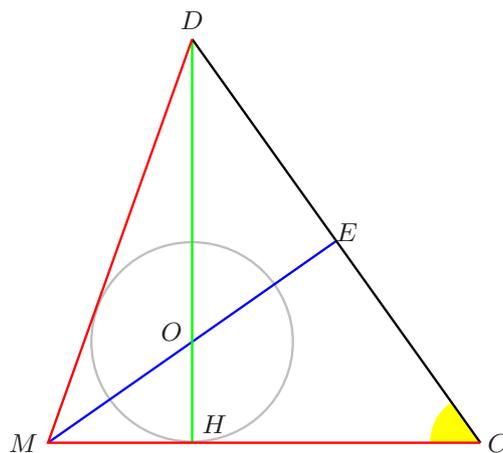
**Fig. 3.** Tetraedro  $ABCD$ , piano  $\alpha \equiv ABE$  e piano  $DMC$ .

Il rapporto tra i volumi è perciò (utilizziamo l'espressione già trovata)

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \frac{1}{12} s^3 \sqrt{2} / \left( \frac{1}{12} \overline{LI}^3 \sqrt{2} \right) = \frac{s^3}{(s/3)^3} = 27,$$

rapporto che si poteva comunque ottenere osservando che i volumi dei due tetraedri stanno tra loro come il cubo del rapporto dei rispettivi spigoli.

c) Consideriamo la sezione piana  $DMC$  di  $T$  (fig. 3) riportata per comodità pure nella figura 4 assieme alla sezione della sfera inscritta.



**Fig. 4.** Sezione  $DMC$  di  $T$ .

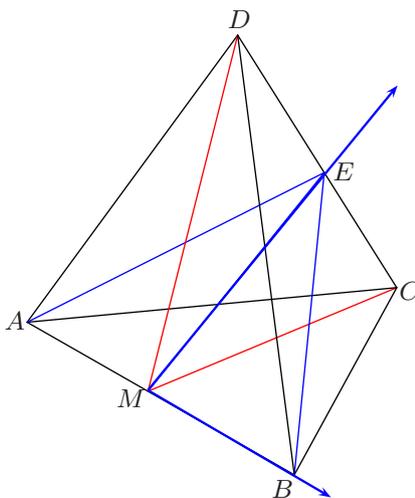
Poiché  $\overline{DM} = \overline{MC} = s\sqrt{3}/2$ , il triangolo  $\triangle DMC$  è isoscele e la sua base  $DC$  possiede lunghezza  $s$  essendo uno spigolo di  $T$ . Allora  $\overline{EC} = s/2$  e

$$\cos(\angle MCE) = \frac{\overline{EC}}{\overline{MC}} = \frac{s/2}{s\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui

$$\begin{aligned} \overline{ME} &= \overline{MC} \operatorname{sen}(\angle MCE) = \frac{\sqrt{3}}{2}s\sqrt{1 - \cos^2(\angle MCE)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}s\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{s}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

d) La parabola  $p$  richiesta passa per  $E$ ,  $A$  e  $B$  e il suo asse coincide con  $ME$ . È quindi conveniente porre l'origine coincidente con  $M$ , l'asse  $x$  coincidente con la retta  $AB$  e l'asse  $y$  coincidente con la retta  $ME$  e orientato da  $M$  verso  $E$  (fig. 5).



**Fig. 5.** Tetraedro  $ABCD$  e piano  $ABE$ .

L'equazione di  $p$ , essendo  $A$  e  $B$  simmetrici rispetto all'origine  $M$  e di coordinate,

$$A\left(-\frac{s}{2}, 0\right), B\left(\frac{s}{2}, 0\right), \quad \text{dovrà essere del tipo} \quad y = a\left(x - \frac{s}{2}\right)\left(x + \frac{s}{2}\right).$$

Imponendo il passaggio per  $E(0, s/\sqrt{2})$  (ricordiamo che  $\overline{ME} = s/\sqrt{2}$ ) si ha

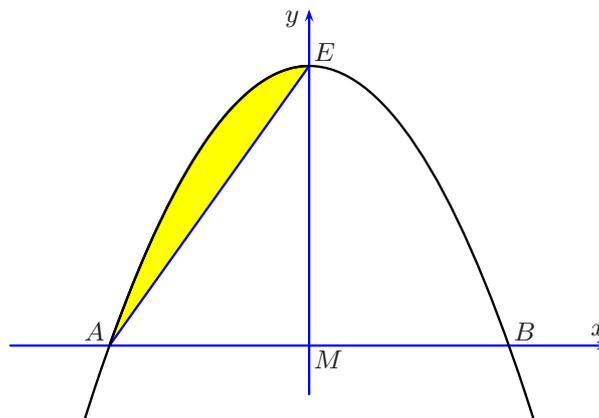
$$\frac{s}{\sqrt{2}} = a\left(-\frac{s^2}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{4}{s\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{s}$$

e, in definitiva,

$$p : y = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \left( x^2 - \frac{s^2}{4} \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{s} x^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

e) Come ultimo punto, viene chiesta l'area della regione colorata in giallo nella fig. 6. Questa regione è limitata da una parabola e da una retta e consiste quindi di un segmento parabolico. L'area di tali figure si determina immediatamente con la formula di Archimede generalizzata  $\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3$  essendo  $a$  il coefficiente del termine di secondo grado nell'equazione canonica della parabola e  $x_1, x_2$  le ascisse degli estremi del segmento parabolico, nel nostro caso i punti  $A$  ed  $E$ . Pertanto

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3 = \frac{1}{6} \left| -\frac{2\sqrt{2}}{s} \right| \cdot \left( \frac{s}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} s^2$$



**Fig. 6.** Piano cartesiano  $EMB$  e assi coordinati.

per cui, uguagliata l'area al valore dato dal testo, discende

$$\frac{\sqrt{2}}{24} s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \Longrightarrow \quad s^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad s = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Assegnata la funzione

$$y = f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + m + |m|},$$

$f(x)$  assume, al variare del parametro  $m$ , la forma

$$\begin{cases} m > 0 \\ f_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m \leq 0 \\ f_2(x) = \frac{2x+1}{x^2}. \end{cases}$$

Nel primo caso il dominio coincide con  $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$ , nel secondo con  $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}_0$ . Le rispettive derivate prime sono

$$\begin{cases} m > 0 \\ f'_1(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} = \frac{2(-x^2-x+2m)}{(x^2+2m)^2} \end{cases}$$

e tale derivata esiste per  $\forall x \in \mathbb{R}$  cioè  $\forall x \in \mathcal{D}_1$ ; nel secondo caso

$$\begin{cases} m \leq 0 \\ f'_2(x) = \frac{2x^2 - (2x+1)2x}{x^4} = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{2(-x-1)}{x^3} \end{cases}$$

e tale derivata possiede dominio  $\mathbb{R}_0$ , coincidente con il dominio della funzione  $\mathcal{D}_2$ .

b) Calcolando le derivate nel punto di ascissa unitaria e posto

$$f'_1(1) = \frac{2(2m-1-1)}{(1+2m)^2} = 0$$

si trova  $2m-2=0$  e quindi  $m=1$ . Nel secondo invece risulta  $f'_2(1) = 2(-1-1)/1^3 \neq 0$ . Ne segue che l'unico valore che soddisfa alla condizione del quesito è  $m=1$ .

c) Si tratta di studiare la funzione di equazione rappresentativa

$$y = \frac{2x+1}{x^2+2}$$

e di dominio noto  $\mathbb{R}$ .

• *Simmetrie.* risultando

$$f(-x) = \frac{2(-x)+1}{(-x)^2+2} = \frac{-2x+1}{x^2+2} \neq \pm f(x),$$

la funzione non né simmetrica pari, né dispari.

• *Segno.*  $y \geq 0$  implica lo studio di  $2x+1 \geq 0$  risolta da  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Poiché il denominatore risulta  $x^2+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  si ha che  $y \geq 0$  se  $x \geq -\frac{1}{2}$ .

• *Limiti.* Risulta  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(2+1/x)}{x^2(1+2/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2+1/x}{x(1+2/x^2)} = 0$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0.$$

La funzione possiede quindi l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

- *Derivata prima.* Riprendendo quanto già svolto

$$y' = \frac{2(2 - x - x^2)}{(x^2 + 2)^2}$$

lo studio del suo segno  $y' \geq 0$  conduce alla  $-x^2 - x - 2 \geq 0$  che, avendo l'equazione associata le radici  $-2$  e  $1$ , è risolta dall'intervallo  $-2 \leq x \leq 1$ . Riassunto graficamente il segno di  $y'$

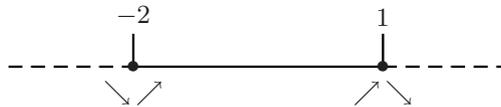


Fig. 1.

emerge che per  $x = -2$  la funzione possiede un minimo relativo locale mentre per  $x = 1$  presenta un massimo locale.

- *Derivata seconda.*

$$\begin{aligned} y'' &= 2 \left[ \frac{(-1 - 2x)(x^2 + 2)^2 - (2 - x - x^2) \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4} \right] \\ &= \frac{2(x^2 + 2)[(x^2 + 2)(-1 - 2x) - 4x(2 - x - x^2)]}{(x^2 + 2)^4} \\ &= \frac{2}{(x^2 + 2)^3} (-x^2 - 2x^3 - 2 - 4x - 8x + 4x^2 + 4x^3) \\ &= \frac{2}{(x^2 + 2)^3} (2x^3 + 3x^2 - 12x - 2) \end{aligned}$$

La condizione  $y'' \geq 0$  comporta lo studio del solo numeratore  $2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$  essendo tutti gli altri termini positivi. Poiché il polinomio  $t = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2$  non è scomponibile in fattori per mezzo della regola di Ruffini in quanto

$$\begin{aligned} t(1) &= 2 + 3 - 12 - 2 \neq 0 & t(-1) &= -2 + 3 + 12 - 2 \neq 0 \\ t(2) &= 16 + 12 - 24 - 2 \neq 0 & t(-2) &= -16 + 12 + 24 - 2 \neq 0, \end{aligned}$$

studiamo la funzione cubica  $t$  cercando di individuare, almeno approssimativamente, il segno nel suo dominio. Si ha che:

- Limiti di  $t$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} t = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \pm\infty$$

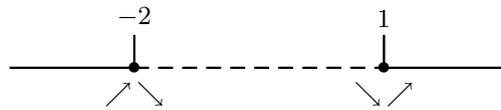


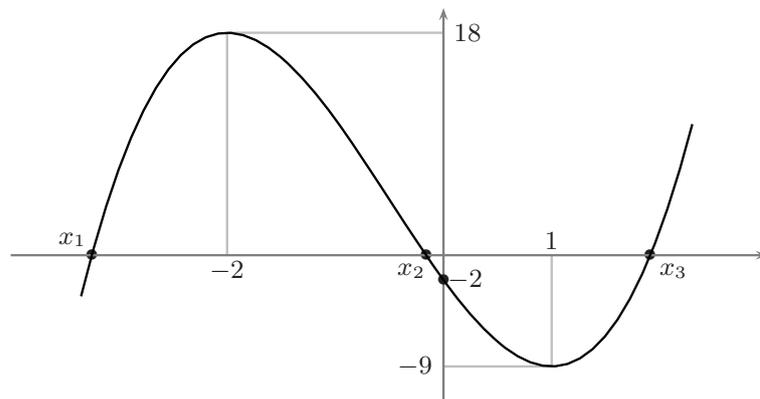
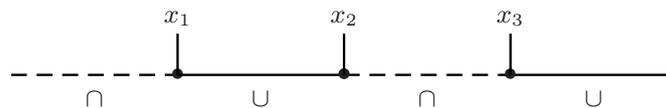
Fig. 2.

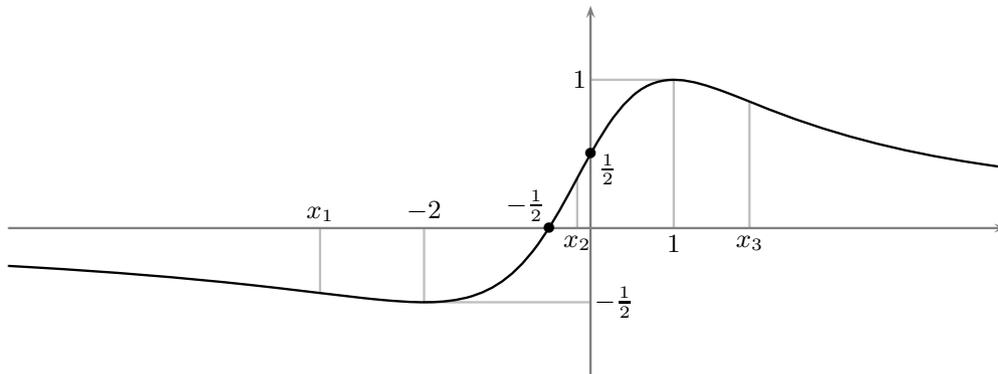
■ Derivata prima:  $t' = 6x^2 + 6x - 12$  e  $t' \geq 0$  fornisce la disequazione  $x^2 + x - 2 \geq 0$ . L'equazione associata possiede radici pari ad 1 e  $-2$  cosicché le soluzioni sono  $t' \geq 0$  se  $x \leq -2 \vee x \geq 1$ : l'andamento è riassunto in figura 2. Essendo interessati ai possibili zeri di  $t$  calcoliamo le ordinate dei punti di estremo relativo cioè

$$t(-2) = -16 + 12 + 24 - 2 = 18 > 0 \quad t(1) = 2 + 3 - 12 - 2 = -9 < 0.$$

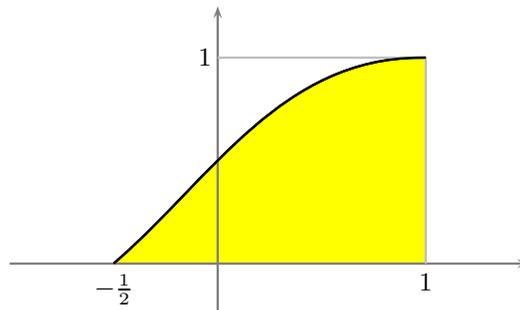
Poiché inoltre  $t$  interseca l'asse delle ordinate in  $(0, -2)$ , il suo grafico dovrà essere del tipo di quello riportato in fig. 3.

Pertanto, per il teorema degli zeri delle funzioni continue,  $t$  si deve annullare in  $x_1$  con  $x_1 < -2$ , in  $x_2$  con  $-2 < x_2 < 0$  e infine, in  $x_3$  con  $x_3 > 1$ . La disequazione  $y'' \geq 0$  sarà pertanto risolta se  $x_1 \leq x \leq x_2 \vee x \geq x_3$  mentre il segno complessivo di  $y''$  è riassunto dalla figura 4.

Fig. 3. Grafico della cubica  $t$ .Fig. 4. Segno della  $y''$ .



**Fig. 5.** Grafico della funzione  $f$  (non isometrico).



**Fig. 6.** Grafico di  $f$  per  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  e regione sottesa.

I punti di flesso di  $f$  sono quindi tre e il grafico  $\gamma$  richiesto è rappresentato dalla figura 5 dove si sono calcolati pure i valori  $f(-2) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(0) = \frac{1}{2}$  e  $f(1) = 1$ .

d) Si tratta di determinare l'area  $\mathcal{A}$  evidenziata nella figura 6. Quest'area è espressa dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx.$$

Procediamo quindi alla ricerca di una primitiva di

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{dx}{x^2+2}.$$

Posto  $t = x^2$  e quindi  $dt = 2x dx$ , il primo integrale della somma a secondo membro diviene

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{dt}{2+t} = \ln|2+t| + c = \ln|x^2+2| + c.$$

Per il secondo, posto  $x^2 = 2t^2$  cioè  $x = \sqrt{2}t$  e quindi  $dx = \sqrt{2} dt$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2} &= \int \frac{\sqrt{2} dt}{2t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c.\end{aligned}$$

Ne segue che

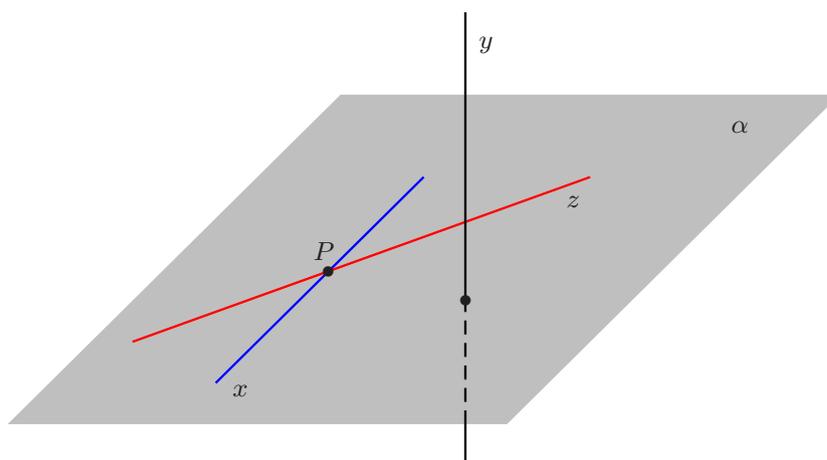
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \left[ \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-1/2}^1 \\ &= \ln 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{1}{4} + 2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

Per la proprietà di simmetria dispari dell'arcotangente,  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ , risulta infine

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \ln 3 - \ln \left( \frac{9}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \\ &= \ln \left( 3 \cdot \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \\ &= \ln \left( \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \approx 0,9632\end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

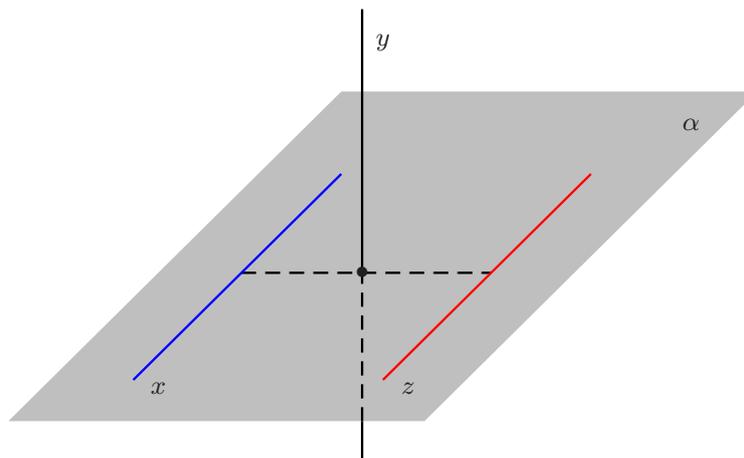
Due rette nello spazio tridimensionale non appartenenti ad uno stesso piano si dicono sghembe. Due rette sghembe hanno la particolarità di non avere punti in comune ma ciò nonostante, esse non sono parallele.



**Fig. 1.**  $y$  è sghemba con  $z$  e con  $x$ .

Consideriamo due rette sghembe, per esempio la retta  $x$  giacente in un piano  $\alpha$  e la seconda  $y$  che incide ortogonalmente il piano  $\alpha$  in un punto non appartenente ad  $x$  (fig. 1):  $x$  e  $y$  sono per costruzione sghembe. Sia  $z$  un'ulteriore retta di  $\alpha$  che non interseca  $y$  nel punto di contatto di questa con  $\alpha$ : ne discende che pure  $y$  e  $z$  sono sghembe.

Poiché la retta  $z$  di fig. 1 incide su  $x$  in un punto  $P$ ,  $x$  e  $z$  non sono però sghembe. Pertanto l'affermazione del quesito è falsa.



**Fig. 2.** Rette sghembe.

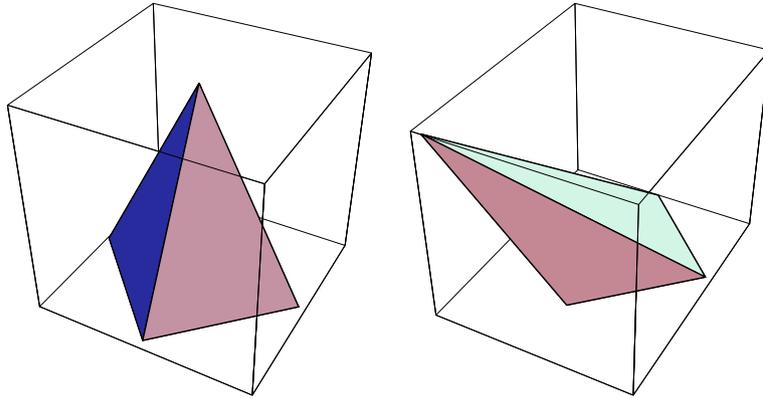
Alla medesima conclusione si giunge se si considera  $z$  appartenente ad  $\alpha$  ma parallela ad  $x$  (fig. 2). In tal caso  $x$  è sghemba con  $y$  e  $y$  con  $z$ , ma  $z$  e  $x$ , essendo parallele, non sono sghembe.

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

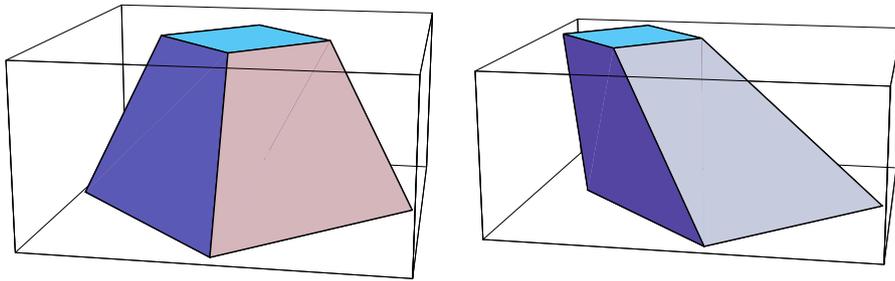
Dato che il testo non specifica se la piramide sia retta o no, considereremo nel seguito entrambe le situazioni. Abbiamo quindi due piramidi aventi come base un quadrato: la prima è pure retta cioè la sua altezza cade sul centro della base, la seconda invece non possiede tale proprietà (fig. 1). Possono presentarsi i casi seguenti\*:

- il piano seziona le piramidi, parallelamente al piano delle loro basi. Il quadrilatero sezione è per entrambe un quadrato (fig. 2).
- Il piano contiene un lato di base (o è parallelo a questo e forma con l'altezza un angolo diverso da quello retto). La sezione per la piramide retta risulta un trapezio isoscele mentre un trapezio qualsiasi per la piramide non retta (fig. 3).

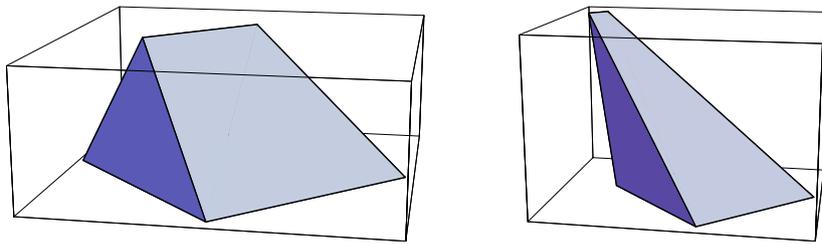
\* si veda <http://www.lorenzoroi.net/prob/sezpiramide/SezioniPiramidi.html> per una pagina interattiva su tale quesito.



**Fig. 1.** Piramidi a base quadrangolare retta e non.



**Fig. 2.** Piano parallelo alla base.



**Fig. 3.** Piano per un lato di base.

- c) Se il piano è parallelo (o la contiene) ad una diagonale della base (in figura 4 passa per un vertice della base e interseca due spigoli in punti aventi la medesima distanza dalla base) si ottiene, per la piramide retta, un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari (detto anche 'romboide') e lati a due a due congruenti. Se la piramide non è retta appare un quadrilatero convesso qualsiasi.
- d) Infine, se il piano ha una qualsiasi altra disposizione, la figura sezione è un quadrilatero qualsiasi comunque convesso (fig. 5).

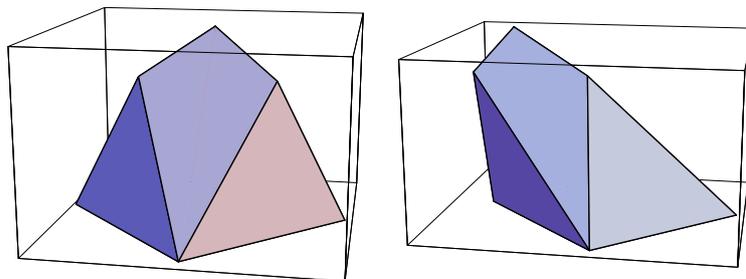


Fig. 4. Piano parallelo ad una diagonale di base.

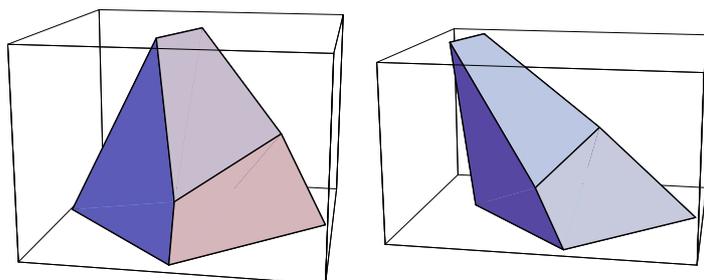


Fig. 5. Piano qualsiasi.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Nella seguente figura 1 rappresentiamo schematicamente la situazione descritta dal testo del quesito: le distanze  $\overline{AB}$  e  $\overline{PB}$  sono incognite mentre è possibile risalire alla misura  $\overline{AP}$  del lato  $AP$  di  $\triangle APB$ .

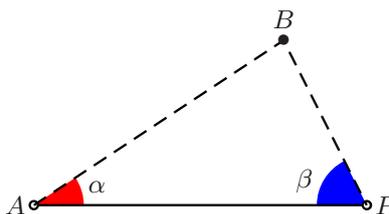


Fig. 1. Schema della situazione.

Disponendo quindi di un goniometro e posizionatolo in  $A$ , si misura l'angolo  $\alpha = \angle BAP$ . Spostatolo in  $P$ , si misura successivamente l'angolo  $\beta = \angle APB$ . Applicando il teorema dei seni a  $\triangle APB$  dove  $\angle ABP = \pi - \angle BAP - \angle APB$

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\angle APB)} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen}(\pi - \angle BAP - \angle APB)}$$

da cui

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \beta)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AP} \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

essendo  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ . Nota quindi la distanza  $\overline{AP}$  e gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , si risale facilmente al lato  $\overline{AB}$ .

Tale era il metodo utilizzato dai cartografi per ottenere le distanze di un punto irraggiungibile sul terreno, nota la distanza e gli angoli di vista tra altri due punti.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare il dominio della funzione  $y = \ln[\sqrt{x+1} - (x-1)]$  va impostato e risolto il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases}$$

dove la prima condizione deriva dall'esistenza della radice quadrata mentre la seconda assicura l'esistenza del logaritmo. Le soluzioni della prima disequazione sono immediate,  $x \geq -1$ , mentre la seconda comporta  $\sqrt{x+1} > x-1$  che suddivide il sistema originario nei due sistemi

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 \geq 0 \\ x+1 > (x-1)^2 \end{cases}$$

Il primo è risolto dall'intervallo  $-1 \leq x < 1$  e dal secondo discende (omettiamo la prima disequazione in quanto già compresa nella terza)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

Quest'ultimo è soddisfatto per  $1 \leq x < 3$  che, unito all'intervallo precedente  $[-1, 1[$ , permette di determinare il dominio  $\mathcal{D}$  complessivo:

$$\mathcal{D} = [-1, 1[ \cup [1, 3[ = [-1, 3[.$$

La risposta corretta è pertanto la B).

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione proposta dal quesito,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ , rientra nella classe delle funzioni cubiche. Essa, come tutte le parabole cubiche, ha per dominio  $\mathbb{R}$  e i limiti all'infinito sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = \pm\infty.$$

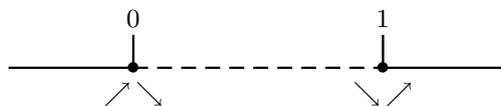
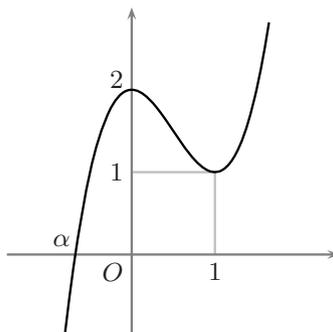


Fig. 1.

La sua derivata prima,  $f'(x)$  e il segno di questa risultano

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0 \quad 6x(x-1) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad x \leq 0 \vee x \geq 1.$$

Rappresentando il segno di  $f'(x)$  graficamente appare evidente che, in  $x = 0$ ,  $f$  possiede un massimo relativo o locale mentre in corrispondenza di  $x = 1$  sussiste un minimo locale. Calcolando le ordinate corrispondenti a questi valori risulta  $f(0) = 2$  e  $f(1) = 1$  cosicché il grafico di  $f$  dev'essere del tipo mostrato in figura.

Fig. 2. Bozza del grafico di  $f$ .

Questo mette in evidenza l'esistenza di un solo punto di intersezione con l'asse delle ascisse, in corrispondenza del quale si ha  $f(\alpha) = 0$  e quindi dove è soddisfatta l'equazione  $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2 = 0$ . Risulta inoltre che  $\alpha < 0$ .

#### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La funzione di  $x$

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$$

può essere considerata come una funzione composta di due funzioni dove si ponga  $z = x^2$  come funzione "più interna". Con tale posizione l'integrale si riscrive come

$$f(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

L'applicazione del teorema sulla derivata della funzione composta comporta ora

$$D[f(x)] = f'(z) \cdot D[z]$$

e dato che, per il teorema di Torricelli–Barrow, la derivata della funzione integrale  $f'(z)$  è la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore di integrazione, si ha  $f'(z) = e^{-z^2}$ . Sostituendo alla  $z$  la sua espressione in termini di  $x$ , segue che

$$D[f(x)] = e^{-z^2} \cdot D[x^2] = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2x e^{-x^4}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Rappresentiamo la somma  $S$  di tutti i possibili prodotti  $i \cdot j$  con  $i, j = 1, 2, \dots, (n-1), n$  in forma tabellare

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot n + \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n + \\ \vdots \\ \vdots \\ n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + \dots + n \cdot (n-1) + n \cdot n = S. \end{array}$$

La somma di questi  $n \cdot n = n^2$  addendi contiene due tipi di prodotti. Al primo tipo appartengono termini come  $1 \cdot 2$  e  $2 \cdot 1$  cioè in generale,  $i \cdot j$  e  $j \cdot i$  (con  $i \neq j$ ) dove i singoli fattori appaiono solo commutati (sono i termini disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale). La somma  $S$  presenta inoltre  $n$  addendi pari al quadrato di ciascun numero  $i$ , ossia del tipo  $i^2$  dove  $i = j$ : questi termini costituiscono la diagonale principale della tabella proposta.

Il quesito chiede comunque la somma di tutte le combinazioni ossia di un numero di addendi (o raggruppamenti) pari a

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (1)$$

e ciascuno di questi deve differire dagli altri per almeno un elemento. Pertanto dalla somma precedente  $S$  vanno sottratti tutti i quadrati rappresentati dal numero

$$q = \sum_{i=1}^n i^2,$$

in quanto nel conteggio delle combinazioni di  $n$  oggetti a gruppi di due non entrano i gruppi che presentano lo stesso elemento più di una volta. Per lo stesso motivo, i termini  $i \cdot j$  e  $j \cdot i$  rappresentano la medesima combinazione di due numeri interi

(nelle combinazioni l'ordine non ha importanza) e pertanto il valore  $S - q$  va a sua volta diviso per 2. Ne segue che si deve calcolare il valore

$$a = \frac{1}{2}(S - q) = \frac{1}{2} \left( S - \sum_{i=1}^n i^2 \right), \quad (2)$$

valore che dovrà essere rappresentato da un numero di addendi pari a quello fornito da (1). Difatti la somma  $S$  ne contiene  $n^2$  mentre  $n$  sono i termini al quadrato per cui si ottiene un numero di addendi pari effettivamente a

$$\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Si tratta ora di calcolare il valore di  $S$  e di  $q$ . Riscritta  $S$  come

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n i \cdot j \right)$$

nella somma più interna si può fattorizzare il termine comune  $i$  per cui

$$S = \sum_{i=1}^n \left( i \sum_{j=1}^n j \right).$$

Poiché i termini  $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$  compresi nella somma tra parentesi appaiono come gli elementi di una progressione aritmetica di ragione 1 con primo termine 1 ed  $n$ -esimo,  $n$ , la loro somma si ottiene applicando la formula che dà la somma dei primi  $n$  termini di tali progressioni ossia

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

Nel nostro caso questa si particolarizza

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

per cui

$$S = \sum_{i=1}^n i \left( \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \frac{1+n}{2} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n i$$

avendo estratto dalla sommatoria i termini non dipendenti dall'indice e quindi costanti. Per lo stesso motivo la somma rimasta a secondo membro fornisce ancora il medesimo valore

$$S = \frac{1+n}{2} \cdot n \cdot \left( \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \left( \frac{1+n}{2} \right)^2 \cdot n^2 \quad (3)$$

Passiamo al calcolo di  $q$  nella (2) e dimostriamo che

$$q = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n). \quad (4)$$

A tale scopo utilizzeremo il principio (o metodo) di induzione matematica. Questo importante principio afferma che un'asserzione  $P_n$  dipendente da un numero naturale  $n$  è valida per ogni  $n \in \mathbb{N}$  se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- a) l'asserzione si dimostra vera per  $n = 1$  e
- b) supposta vera l'asserzione corrispondente ad un arbitrario numero naturale  $n = k$ , si può dimostrare la verità dell'asserzione relativa al valore successivo  $n' = k+1$ . In altri termini si tratta di dimostrare l'implicazione  $P_k \implies P_{k+1}$ .

Nel nostro caso la (4) si riduce per  $n = 1$  alla

$$1^1 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(1+2) \implies 1 = 1$$

manifestamente soddisfatta. Per verificare il punto b), assumiamo valida la (4) per un arbitrario valore  $n = k$ , ossia

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(1+k)(1+2k) \quad \text{sia vera.} \quad (5)$$

Ne segue che la somma dei primi  $k+1$  quadrati si può riscrivere come

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \left( \sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2.$$

Sfruttando il valore della somma dei primi  $k$  quadrati fornito dalla (5) si ha

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}k(1+k)(1+2k) + (k+1)^2$$

e questa diviene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{1}{6}(k+1)[k(1+2k) + 6k + 6] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6].\end{aligned}$$

Poiché il termine tra parentesi quadrate si può riscrivere identicamente come

$$2k^2 + 7k + 6 = [1 + (k + 1)] \cdot [1 + 2(k + 1)],$$

giungiamo alla

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1) \cdot [1 + (k + 1)] \cdot [1 + 2(k + 1)]$$

e ciò completa la dimostrazione del punto b) in quanto l'espressione ottenuta non è nient'altro che la (4) calcolata per  $n' = k + 1$ .

Riprendendo la (2) e inserendo i risultati parziali (3) e (4) abbiamo dopo qualche passaggio

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \left( S - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1+n}{2} \right)^2 \cdot n^2 - \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n) \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left[ \frac{(1+n)n}{2} - \frac{1}{3}(1+2n) \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 + 3n - 2 - 4n) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 - n - 2),\end{aligned}$$

risultato che coincide con la risposta D del quesito

$$a = \frac{n(n+1)}{24} \cdot (n-1)(3n+2)$$

non appena si osservi che  $(n-1)(3n+2) = 3n^2 - n - 2$ .

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Per ipotesi, i due numeri naturali dispari  $x$  e  $y$  soddisfano alla  $x - y = 2$  per cui la differenza dei rispettivi cubi si scompone in

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= 2(x^2 + xy + y^2).\end{aligned}$$

Quest'ultima mette in evidenza come  $x^3 - y^3$  sia divisibile per 2. D'altra parte il fattore  $x^2 + xy + y^2$  si può riscrivere come

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy + xy \\ &= (x - y)^2 + 3xy \\ &= 2^2 + 3xy = 4 + 3xy, \end{aligned}$$

e quest'ultima forma mostra come il termine  $x^2 + xy + y^2 = 4 + 3xy$  non possa essere divisibile per 3 in quanto 4 non lo è a sua volta. In definitiva,  $x^3 - y^3$  è divisibile per 2 ma non per 3 e quindi la risposta corretta è la b).

Un metodo alternativo per dimostrare questa affermazione sfrutta l'ipotesi che  $x$  e  $y$  sono interi dispari. Si può quindi scriverli come

$$x = 2m + 1 \quad y = 2n + 1 \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2m - 2n = 2(m - n) = 2$$

e pertanto  $m - n = 1$  cioè  $m = 1 + n$ . Sostituendo questo risultato in  $x = 2m + 1$  si ha che  $x = 2(1 + n) + 1 = 3 + 2n$ . Il fattore  $x^2 + xy + y^2$  diviene quindi

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (3 + 2n)^2 + (3 + 2n)(2n + 1) + (2n + 1)^2 \\ &= 12n^2 + 24n + 13 \end{aligned}$$

che mostra come tale fattore della scomposizione di  $x^3 - y^3$  non possa essere divisibile per 3. Difatti per poterlo essere il termine noto 13 dovrebbe essere divisibile per 3 come lo sono gli altri due addendi ma ciò è evidentemente assurdo essendo 13 un numero primo.

### Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

Supposti estratti i numeri 1 e 90 rimangono nell'urna 88 numeri. Il numero delle terne che si possono formare con questi 88 numeri e da associare ai due numeri già estratti, è pari al numero delle cinque richieste. Pertanto, essendo ininfluenza l'ordine di estrazione si tratta di calcolare il numero delle combinazioni semplici di 88 elementi a gruppi di 3 ossia

$$\begin{aligned} C_{88,3} &= \binom{88}{3} = \frac{88!}{3!(88-3)!} = \frac{(88 \cdot 87 \cdot 86) \cdot 85!}{3!85!} \\ &= \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6} = 109.736. \end{aligned}$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Poniamo

$$x = \lg_2 3 \cdot \lg_3 2$$

e cerchiamo di riportare entrambi i logaritmi alla stessa base, per esempio 2. Ricordando la formula che permette di passare da un logaritmo nella base  $b$  a quelli nella base  $a$  cioè

$$\lg_b t = \frac{\lg_a t}{\lg_a b}$$

si ha subito

$$x = \lg_2 3 \cdot \left( \frac{\lg_2 2}{\lg_2 3} \right)$$

ma, essendo  $\lg_2 2 = 1$  discende

$$x = \lg_2 3 \cdot \left( \frac{1}{\lg_2 3} \right) = 1.$$

L'affermazione del quesito è pertanto vera.

# ESAME 2003 PNI

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Nel piano sono dati: il cerchio  $\gamma$  di diametro  $OA = a$ , la retta  $t$  tangente a  $\gamma$  in  $A$ , una retta  $r$  passante per  $O$ , il punto  $B$ , ulteriore intersezione di  $r$  con  $\gamma$ , il punto  $C$  intersezione di  $r$  con  $t$ .

La parallela per  $B$  a  $t$  e la perpendicolare per  $C$  a  $t$  s'intersecano in  $P$ . Al variare di  $r$ ,  $P$  descrive il luogo geometrico  $\Gamma$  noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove  $D$  è la proiezione ortogonale di  $B$  su  $OA$ ;

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche  $Oxy$ , l'equazione cartesiana di  $\Gamma$  è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

3. Si tracci il grafico di  $\Gamma$  e si provi che l'area compresa fra  $\Gamma$  e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio  $\gamma$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$  con  $a, b, c$  numeri reali. Si determinino  $a, b, c$  in modo che:

1. la funzione  $f$  sia pari;
2.  $f(0) = 2$ ;

$$3. \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \log 2}.$$

Si studi la funzione  $g$  ottenuta sostituendo ad  $a, b, c$  i valori così determinati e se ne disegni il grafico  $G$ .

Si consideri la retta  $r$  di equazione  $y = 4$  e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca  $G$ , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra  $r$  e  $G$ .

Si calcoli  $\int \frac{1}{g(x)} dx$ .

Si determini la funzione  $g'$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $r$ .

Soluzione

### Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

Soluzione

2. Tre scatole  $A, B$  e  $C$  contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.  $A$  contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose,  $B$  ne contiene 500 con il 20% difettose e  $C$  ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

Soluzione

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

Soluzione

4. Dare un esempio di polinomio  $P(x)$  il cui grafico tagli la retta  $y = 2$  quattro volte.

Soluzione

5. Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0.$$

Soluzione

6. Si vuole che l'equazione  $x^3 + bx - 7 = 0$  abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di  $b$ ?

Soluzione

7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di  $\pi$ , applicando un metodo di integrazione numerica.

Soluzione

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da  $\int_0^1 \pi x^3 dx$ .

Soluzione

9. Di una funzione  $f(x)$  si sa che ha derivata seconda uguale a  $\sin x$  e che  $f'(0) = 1$ . Quanto vale  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$ ?

Soluzione

10. Verificare che l'equazione  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

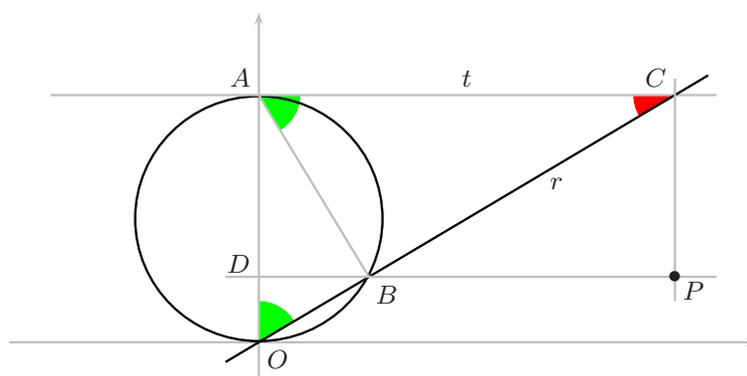
**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1) Costruito il punto  $P$  di figura 1, osserviamo la similitudine esistente tra i triangoli rettangoli  $\triangle OBD \sim \triangle OCA$  per cui discende

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}.$$

Essendo  $\overline{AC} = \overline{DP}$  segue che

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{DP}}.$$



**Fig. 1.** Elementi per la costruzione del punto  $P$ .

Per la dimostrazione della seconda proposizione va notata la similitudine tra  $\triangle OCA$  e  $\triangle ABC$  essendo questi entrambi rettangoli rispettivamente in  $\angle A$  e  $\angle B$  e con  $\angle BCA$  in comune. Ne segue

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \text{ma} \quad \overline{AC} = \overline{DP} \quad \implies \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}}.$$

2) Come evidenziato già dalla figura 1 la scelta fatta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche consiste nel far coincidere l'origine  $O$  del sistema con l'estremo  $O$  del diametro mentre l'altro estremo  $A$  viene posto sull'asse delle ordinate del medesimo sistema. In tal modo i punti  $O$  e  $A$  avranno coordinate  $O(0,0)$ ,  $A(0,a)$ , la retta  $t$  sarà descritta dall'equazione  $t: y = a$  e la retta  $r$  da  $r: y = mx$ . Si deduce quindi che l'ascissa di  $\{C\} = t \cap r$  è

$$\begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} \quad mx = a \quad x_C = \frac{a}{m} \quad (m \neq 0) \quad C\left(\frac{a}{m}, a\right).$$

L'equazione della circonferenza di diametro  $\overline{OA} = a$  si ottiene facilmente considerando che il centro è individuato dalla coppia di coordinate  $(0, \frac{a}{2})$  e dal raggio pari a  $\frac{a}{2}$ .

$$\gamma : (x - 0)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Poiché di  $P$  conosciamo già l'ascissa ( $x_P = x_C = \frac{a}{m}$ ), determiniamo l'ordinata di  $B$  che è la medesima di  $P$ .

$$r \cap \gamma \implies \begin{cases} y = mx \\ x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases} \implies \left(\frac{y}{m}\right)^2 + y^2 - ay = 0.$$

Quest'ultima equazione si riscrive

$$\frac{y^2}{m^2} + y^2 - ay = 0 \quad \text{che, accanto al valore aspettato } y = 0,$$

fornisce

$$y \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = a \quad y_B = \frac{am^2}{1 + m^2} = y_P.$$

Quindi

$$P \left(\frac{a}{m}, \frac{am^2}{1 + m^2}\right):$$

le coordinate del punto  $P$  sono in tal modo espresse in termini del parametro comune  $m$  e il luogo  $\Gamma$  dei punti  $P$  si ottiene al variare di  $m \in \mathbb{R}$ . Abbiamo pertanto la tipica rappresentazione parametrica di un luogo: poiché il testo fornisce la rappresentazione esplicita di  $\Gamma$  per verificare la coerenza di quanto fatto dobbiamo ridurre la rappresentazione parametrica a quella esplicita. A tale scopo è sufficiente eliminare il parametro dalla forma parametrica e quindi risolvere l'equazione ottenuta nella variabile  $y$ . Allora ricavato  $m = a/x$  dalla prima equazione del sistema ( $x \neq 0$ )

$$\begin{cases} x = a/m \\ y = \frac{am^2}{1 + m^2} \end{cases}$$

e sostituito nella seconda si ha

$$y = \frac{a(a/x)^2}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = \frac{a^3}{x^2 \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

che coincide con quella proposta dal testo. Il caso particolare di  $P \equiv A$  non viene descritto dalla forma parametrica scelta (in quanto non esiste il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse  $y$ ) mentre è compreso in quella esplicita. Forme

parametriche coinvolgenti altri parametri (come per esempio, l'angolo  $\angle AOC$ ), possono comunque rappresentare anche tale punto\*.

3) Dobbiamo studiare il grafico della funzione di variabile reale espressa dall'equazione

$$\Gamma : y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

e di dominio  $\mathbb{R}$ . Circa le sue proprietà di simmetria discende facilmente che vale l'identità  $f(-x) = f(x)$  per  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Il grafico della versiera è pertanto simmetrico rispetto all'asse delle  $y$  e la funzione è pari. È inoltre  $y > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ).

• Lo studio dei limiti comporta l'analisi di  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$  che risulta

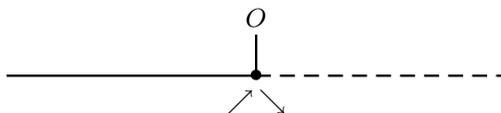
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$$

in quanto funzione razionale fratta con il grado del denominatore (secondo) maggiore del grado del numeratore (zero).

• *Derivata prima.* Il calcolo di  $y'$  fornisce

$$y' = a^3 \left[ -\frac{2x}{(x^2 + a^2)^2} \right] = \frac{-2a^3x}{(x^2 + a^2)^2},$$

e  $y \geq 0$  implica  $-2a^3x \geq 0$  e quindi  $x \leq 0$  in quanto  $a > 0$ . In corrispondenza dell'origine la funzione presenta un punto di massimo relativo proprio.



**Fig. 2.**

• *Derivata seconda.* Il calcolo di  $y''$  risulta

$$\begin{aligned} y'' &= -2a^3 \left[ \frac{(x^2 + a^2)^2 - 2(x^2 + a^2) \cdot 2x \cdot x}{(x^2 + a^2)^4} \right] \\ &= -2a^3 \left[ \frac{x^2 + a^2 - 4x^2}{(x^2 + a^2)^3} \right] = 2a^3 \cdot \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^3}. \end{aligned}$$

Lo studio del segno di  $y''$  cioè  $y'' \geq 0$  si riduce all'analisi del numeratore essendo i restanti termini positivi. Discende quindi  $3x^2 - a^2 \geq 0$ ,  $3x^2 \geq a^2$ , risulta

\* per altre informazioni si veda la pagina web

<http://www.lorenzoroi.net/curvecelebri/versiera.html>

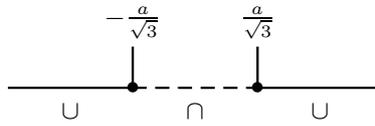


Fig. 3.

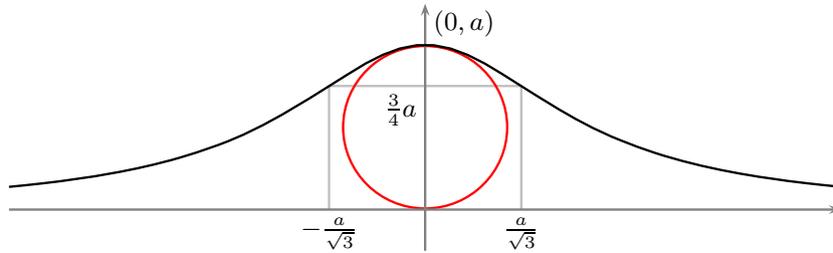
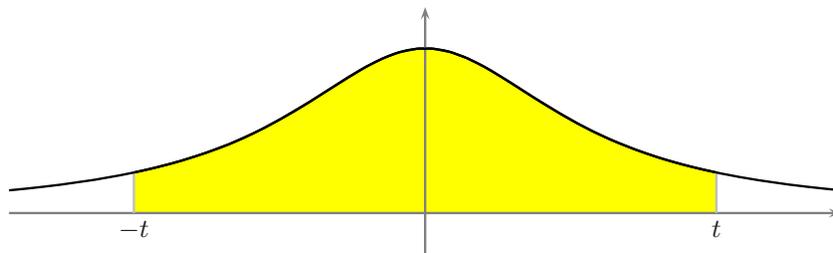


Fig. 4. Grafico della versiera di Gaetana Agnesi.

per  $x \leq -a/\sqrt{3} \vee x \geq a/\sqrt{3}$ . Il grafico corrispondente di  $y''$  è dato dalla figura 3 e mostra come vi siano due punti di flesso in corrispondenza delle ascisse  $x = \pm a/\sqrt{3}$ . Calcolata l'ordinata del massimo  $y(0) = a$  il grafico della versiera è infine rappresentato dalla figura 4 (dove si è riportata la circonferenza servita per costruirla).

Il calcolo dell'area compresa tra la versiera e l'asse delle ascisse (fig. 5) si può eseguire introducendo un integrale generalizzato.

Fig. 5. Area della regione compresa tra la versiera e l'asse  $x$ .

Sia quindi  $t$  l'estremo superiore dell'intervallo finito di integrazione  $[-t, t]$ : l'area della regione evidenziata in fig. 5 è espressa dall'integrale definito

$$\int_{-t}^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx$$

mentre l'area della regione richiesta dal testo viene rappresentata dal limite

$$\mathcal{A} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx.$$

Sfruttando la simmetria di  $\Gamma$  possiamo riscrivere tale integrale generalizzato come

$$\mathcal{A} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx \quad (1)$$

e tale limite si potrà eseguire non appena si sia risolto l'integrale indefinito

$$\int \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx.$$

Quest'ultimo si può trasformare in

$$\int \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{a^3}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} dx = \int \frac{a dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Posto quindi  $x/a = z$  cioè  $x = az$  che implica  $dx = adz$ , abbiamo

$$\int \frac{a dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \int \frac{a^2 dz}{1 + z^2} = a^2 \int \frac{dz}{1 + z^2} = a^2 \operatorname{arctg} z + c = a^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a}\right) + c$$

dove si è fatto uso della conoscenza dell'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

Ripreso l'integrale generalizzato (1), questo si riscrive come

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \right]_0^t \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} a^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a}\right) - a^2 \operatorname{arctg} 0 \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} a^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{a}\right) = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2 : \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzato il noto limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(t/a) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

L'area del cerchio  $\gamma$  è pari a  $\mathcal{A}(\gamma) = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2/4$  per cui risulta, come richiesto,  $\mathcal{A} = 4\mathcal{A}(\gamma)$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Si ha  $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Perché  $f$  sia l'equazione rappresentativa di una funzione pari, dev'essere identicamente per  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = a2^{-x} + b2^{-(-x)} + c = f(x).$$

Ne segue

$$a2^{-x} + b2^x + c = a2^x + b2^{-x} + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$2^{-x}(a - b) + 2^x(b - a) = 0.$$

Affinché quest'ultima valga per  $\forall x \in \mathbb{R}$  cioè, lo ripetiamo, sia un'identità, dev'essere  $a - b = 0$  cioè  $a = b$ .

La condizione  $f(0) = 2$  implica invece  $f(0) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2$  e, per quanto appena trovato,  $a + b + c = 2$ ,  $a + a + c = 2$ ,  $c = 2 - 2a$ .

L'ultima condizione si traduce nell'integrale (usiamo la notazione  $\ln x$  in luogo della  $\log x$ )

$$\int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + c) dx = \frac{3}{2 \ln 2}$$

che verrà risolto non appena siano conosciuti i due integrali

$$\int 2^x dx \quad \int 2^{-x} dx$$

che appaiono nella scomposizione del primo membro.

Anche se il primo rientra tra gli integrali elementari, trattiamoli allo stesso modo riportandoli alla base naturale e quindi introduciamo la nuova variabile  $t = x \ln 2$  (e  $dt = dx \ln 2$ )

$$\int 2^x dx = \int e^{x \ln 2} dx = \int \frac{e^t dt}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int e^t dt = \frac{e^t}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{\ln 2} + c.$$

Analogamente ( $t = -x \ln 2$ )

$$\int 2^{-x} dx = \int e^{-x \ln 2} dx = \int -\frac{e^t dt}{\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2} \int e^t dt = -\frac{e^t}{\ln 2} + c = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + c.$$

L'integrale **originario** diviene ora

$$\begin{aligned} \int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + c) dx &= a \int_0^1 2^x dx + a \int_0^1 2^{-x} dx + c \int_0^1 dx \\ &= \left[ a \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - a \frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx \right]_0^1 = \frac{3}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$\frac{2a}{\ln 2} - \frac{a}{2 \ln 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{a}{\ln 2} = \frac{3}{2 \ln 2}$$

che si semplifica in  $3a + 2c \ln 2 = 3$ . Sostituendo  $c = 2 - 2a$  abbiamo

$$3a + 4 \ln 2 - 4a \ln 2 = 3, \quad a(3 - 4 \ln 2) = 3 - 4 \ln 2 \quad a = 1$$

da cui

$$a = b = 1 \quad e \quad c = 0.$$

La funzione  $g(x)$  è pertanto:  $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ .

b) *Studio della funzione g.* Come imposto inizialmente la  $g$  è una funzione pari  $g(-x) = 2^x + 2^{-x} = g(x)$  e positiva per  $x \in \mathbb{R}$  in quanto somma di esponenziali. Continua nel proprio dominio, non possiede punti singolari di discontinuità. I limiti all'infinito valgono (per  $x \rightarrow -\infty$  lo si ottiene per simmetria)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0.$$

Questo risultato lascia aperta la possibilità che  $g$  possieda degli asintoti obliqui. Lo studio di

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$$

conduce ad un caso di indeterminazione per cui conviene analizzare il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x \ln 2 - \ln 2 \cdot 2^{-x}}{1} = \pm\infty.$$

Poiché questo esiste possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \pm\infty :$$

non essendo questo finito, la  $g$  non può presentare alcun asintoto obliquo.

• *Derivata prima.* Il calcolo della  $g'(x)$  comporta

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2 \cdot 2^{-x} = \ln 2(2^x - 2^{-x})$$

e lo studio del suo segno implica

$$g'(x) \geq 0, \quad 2^x - 2^{-x} \geq 0, \quad 2^x \geq 2^{-x}, \quad x \geq -x, \quad 2x \geq 0, \quad x \geq 0.$$

La funzione presenta in  $x = 0$  un minimo come evidenziato dal grafico riassuntivo del segno di  $g'$ .

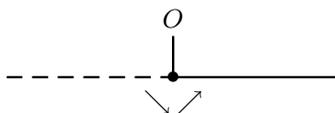
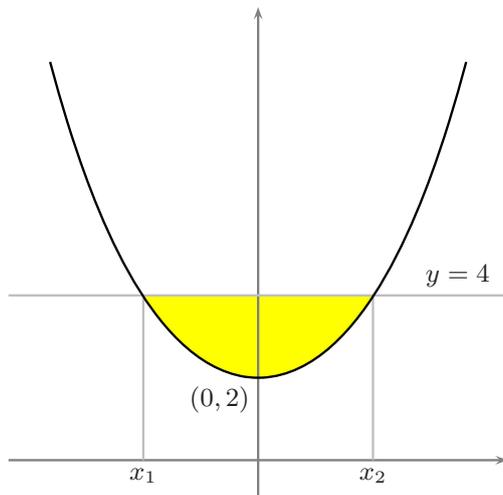


Fig. 1.

• *Derivata seconda.* Il calcolo della  $g''(x)$  conduce all'espressione

$$g''(x) = \ln 2(\ln 2 \cdot 2^x + \ln 2 \cdot 2^{-x}) = \ln^2 2(2^x + 2^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione risulta in ogni punto convessa. Notato che  $g(0) = 2^0 + 2^{-0} = 2$  possiamo infine proporre il grafico di  $g$  (fig. 2)



**Fig. 2.** Grafico della funzione  $g(x)$  e area richiesta.

c) Tracciata la retta di equazione  $y = 4$  si richiedono ora le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  dei suoi punti di intersezione con  $g$  (fig. 2). Questo problema equivale a determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{che si riduce a} \quad 2^x + 2^{-x} = 4.$$

Riscritta questa equazione come

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \quad \text{e moltiplicata per } 2^x \text{ si ha} \quad (2^x)^2 + 1 = 4 \cdot 2^x.$$

Posto  $2^x = t$  diviene  $t^2 - 4t + 1 = 0$  che è risolta dai valori

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{e quindi} \quad 2^x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Prendendo il logaritmo in base 2 dell'ultima abbiamo che  $x_{1,2} = \lg_2(2 \pm \sqrt{3})$ : i punti di intersezione possiedono le ascisse  $x_1 = \lg_2(2 - \sqrt{3})$  e  $x_2 = \lg_2(2 + \sqrt{3})$ . Di questi valori, il testo chiede una stima ottenuta applicando un qualsiasi procedimento iterativo. Ricordando la monotonia crescente dell'esponenziale  $2^x$  e che

$2 + \sqrt{3} = 2^{x_2}$ , applichiamo il metodo di bisezione che, a partire dall'osservazione  $2 + \sqrt{3} \approx 3,732$ , permette le deduzioni

$$2 < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad 2^1 < 2^{x_2} < 2^2 \quad \implies \quad 1 < x_2 < 2.$$

Scelto ora il valore medio dell'ultimo intervallo e calcolato  $2^{1,5} \approx 2,8284$  è ancora

$$2^{1,5} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,5 < x_2 < 2.$$

Ora  $2^{1,75} \approx 3,24$

$$2^{1,75} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,75 < x_2 < 2;$$

ancora  $2^{1,875} \approx 3,66$  cosicché

$$2^{1,875} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,875 < x_2 < 2;$$

infine  $2^{1,9375} \approx 3,83$

$$2^{1,875} < 2 + \sqrt{3} < 2^{1,9375} \quad \implies \quad 1,875 < x_2 < 1,9375.$$

Nello stesso modo, con il metodo di bisezione, si può procedere direttamente dalla  $2^x + 2^{-x} = 4$  dato che il grafico del primo membro (e in particolare, la sua monotonia) è conosciuto.

d) *Calcolo dell'area.* L'area della regione finita delimitata dal grafico di  $g$  e dalla retta di equazione  $y = 4$  ed evidenziata in giallo in fig. 2 viene data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{\lg_2(2-\sqrt{3})}^{\lg_2(2+\sqrt{3})} 4 - (2^x + 2^{-x}) \, dx$$

che per la già notata simmetria diviene

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{\lg_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x}) \, dx.$$

Riprendendo gli integrali indefiniti delle funzioni  $2^x$  e  $2^{-x}$  precedentemente calcolati, l'area diviene

$$\mathcal{A} = 2 \left[ 4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^{\lg_2(2+\sqrt{3})}$$

e dopo qualche calcolo numerico si riduce a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{2 + \sqrt{3}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2(2 + \sqrt{3})} - 0 \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{4 + 3 + 4\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{3}}{\ln 2} \right] \approx 5,2045
 \end{aligned}$$

e) Il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}}$$

si può riportare ad un integrale più semplice con la sostituzione  $t = 2^x$ . Questa implica  $x = \lg_2 t$  e il differenziale  $dx = \frac{1}{t \ln 2} dt$ , per cui

$$\int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}} = \int \frac{dx}{2^x + (1/2^x)} = \int \frac{1}{t + (1/t)} \cdot \frac{1}{t \ln 2} dt.$$

Estratti i termini costanti si ha infine

$$\int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{\operatorname{arctg}(2^x)}{\ln 2} + c.$$

f) Per determinare infine la funzione  $g'(x)$ , simmetrica di  $g(x)$  rispetto alla retta  $y = 4$  (non va confusa con la derivata  $g'$ ), va considerata la trasformazione di simmetria assiale di equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y + y'}{2} = 4 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x' \\ y = 8 - y'. \end{cases}$$

Sostituendo in  $y = 2^x + 2^{-x}$  si ha

$$8 - y' = 2^{x'} + 2^{-x'} \quad \text{da cui} \quad y' = 8 - 2^{x'} - 2^{-x'}$$

ossia, ritornando alle variabili canoniche  $x$  e  $y$ , anche

$$g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Considerando solo l'andata si tratta di determinare il numero delle combinazioni semplici di 18 elementi a gruppi di 2 ossia

$$C_{18,2} = \binom{18}{2} = 153.$$

Con il ritorno quindi il numero complessivo di partite è  $2 \cdot C_{18,2} = 306$ .

In modo analogo, considerando entrambi i gironi di andata e ritorno e perciò contando come diverse partite dove appaiono le medesime squadre si ottiene

$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306,$$

dove  $D_{18,2}$  è il numero delle disposizioni semplici a gruppi di 2 di 18 elementi. Infine in termini intuitivi, in ogni giornata vengono giocate 9 partite ("una volta", alla domenica), per 17 giornate che costituiscono il girone di andata e 17 giornate per il ritorno. Quindi  $9 \text{ partite} \times 17 \text{ giornate} \times 2 \text{ gironi} = 18 \cdot 17 = 306$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Definiti gli eventi

$$\begin{aligned} F &= \{\text{la lampada è difettosa}\} \\ E_A &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } A\} \\ E_B &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } B\} \\ E_C &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } C\} \end{aligned}$$

notiamo che gli eventi  $F \cap E_A$ ,  $F \cap E_B$ ,  $F \cap E_C$  sono incompatibili e che l'evento complesso  $F$  si può decomporre nell'unione dei tre precedenti ossia

$$F = (F \cap E_A) \cup (F \cap E_B) \cup (F \cap E_C).$$

In tali ipotesi possiamo applicare il teorema delle probabilità totali e quindi esprimere la probabilità dell'evento  $F$ ,  $p(F)$  come

$$p(F) = p(F \cap E_A) + p(F \cap E_B) + p(F \cap E_C).$$

Il calcolo delle probabilità che appaiono a secondo membro procede invece con il teorema della probabilità composta che fornisce

$$\begin{aligned} p(F \cap E_A) &= p(F/E_A) \cdot p(E_A) \\ p(F \cap E_B) &= p(F/E_B) \cdot p(E_B) \\ p(F \cap E_C) &= p(F/E_C) \cdot p(E_C). \end{aligned}$$

Poiché si sceglie una scatola a caso risulta  $p(E_A) = p(E_B) = p(E_C) = \frac{1}{3}$  mentre, una volta scelta la scatola, risulta (il numero di lampadine contenuto in ogni scatola è quindi superfluo)

$$p(F/E_A) = 5\% = \frac{5}{100} \quad p(F/E_B) = 20\% = \frac{20}{100} \quad p(F/E_C) = 10\% = \frac{10}{100} :$$

sostituendo queste probabilità nella

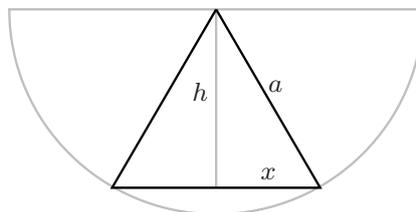
$$p(F) = p(F/E_A)p(E_A) + p(F/E_B)p(E_B) + p(F/E_C)p(E_C)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} p(F) &= \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{5 + 20 + 10}{100} \right) \\ &= \frac{35}{300} = \frac{7}{60} \approx 0,1167. \end{aligned}$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Rappresentiamo il problema considerando una sezione piana del cono di apotema  $a = 2$  dm e poniamo pari ad  $x$  il suo raggio di base (fig. 1).



**Fig. 1.**

È pertanto  $0 \leq x \leq a$  e, detta  $h$  l'altezza del cono, il suo volume si esprime come  $\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi x^2) \cdot h$ . Per il teorema di Pitagora è anche

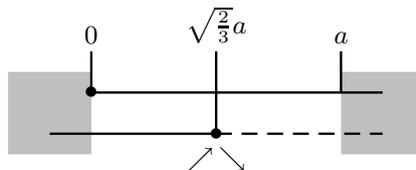
$$h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

per cui si dovrà individuare il valore massimo della funzione

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2} & \text{entro le limitazioni} \\ 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Derivando  $\mathcal{V}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{1}{3}\pi \left[ 2x\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} [2x(a^2 - x^2) - x^3] \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (2xa^2 - 3x^3). \end{aligned}$$



**Fig. 2.**

Il segno di  $\mathcal{V}'$  comporta lo studio del prodotto  $x(2a^2 - 3x^2) \geq 0$ . Poiché  $x \geq 0$  mentre

$$2a^2 - 3x^2 \geq 0 \quad \text{implica} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}a \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

il segno di  $\mathcal{V}'$  è riassunto in fig. 2. In corrispondenza di  $x_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$  il volume  $\mathcal{V}$  assume il valore massimo

$$\mathcal{V} \left( \sqrt{\frac{2}{3}}a \right) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{2}{3}a^2 \right) \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}.$$

Poiché si chiede il valore in centilitri va ricordato che  $1 \text{ dm}^3 = 10^2 \text{ cl}$ . Sostituendo

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}(2 \text{ dm})^3 \approx 3,2245 \text{ dm}^3 = 3,2245 \times 10^2 \text{ cl} = 322,45 \text{ cl}.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Un polinomio che intersechi l'asse delle  $x$  in quattro punti può essere per esempio

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

per cui, il polinomio che si ottiene traslando  $p(x)$  di due unità nel verso positivo delle ordinate  $P(x) = p(x) + 2$  cioè

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2 \\ &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 26 \end{aligned}$$

soddisfa alla richiesta del quesito intersecando la retta di equazione  $y = 2$  in  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  e  $x = 4$ .

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il polinomio di grado  $n$

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  e ivi derivabile. Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due sue radici cioè  $P(\alpha) = P(\beta) = 0$  è possibile applicare in  $[\alpha, \beta]$  il teorema di Rolle in quanto tutte le sue ipotesi sono soddisfatte. Di conseguenza esiste almeno un punto di ascissa  $x \in ]\alpha, \beta[$  dove la derivata prima di  $P$  si annulla cioè  $P'(x) = 0$ . Il calcolo di  $P'(x)$  fornisce

$$P'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$$

per cui  $\exists x \in ]\alpha, \beta[$  dove

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $y = x^3 + bx - 7$ , affinché l'equazione  $y = 0$  presenti tre radici reali il grafico della cubica  $y$  dovrà avere a) un punto di massimo e uno di minimo relativi e b) i corrispondenti valori del massimo e del minimo dovranno essere di segno opposto. Difatti calcolata  $y' = 3x^2 + b$ , la condizione a) impone che la disequazione

$$y' \geq 0 \quad \text{cioè} \quad 3x^2 + b \geq 0 \quad x^2 \geq -\frac{b}{3}$$

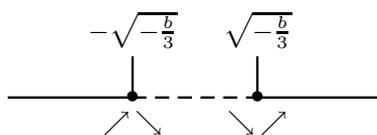


Fig. 1.

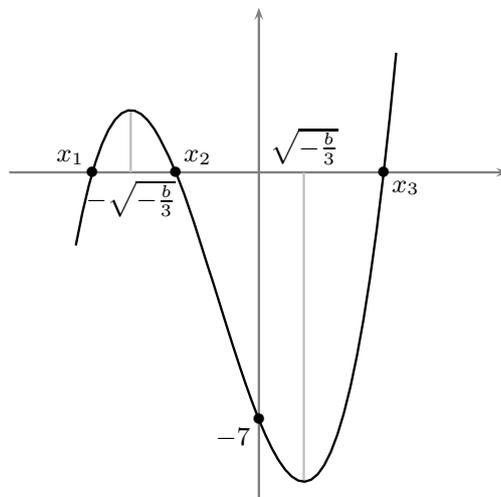


Fig. 2. Andamento qualitativo della cubica assegnata.

cambi segno due volte. Ora solo se  $b < 0$  le soluzioni di

$$x^2 \geq -\frac{b}{3} \quad \text{sono della forma} \quad x \leq -\sqrt{-\frac{b}{3}} \vee x \geq \sqrt{-\frac{b}{3}}$$

e implicano un segno per  $y'$  come quello riassunto in fig. 1.

Poiché per  $x = 0$  risulta  $y = -7 < 0$  l'ordinata del minimo non potrà che essere negativa (fig. 2) per cui la condizione b) si traduce imponendo che sia  $y(x_M) > 0$  con  $x_M = -\sqrt{-b/3}$ .

Sostituendo

$$y(x_M) = x_M^3 + bx_M - 7 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3 - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0.$$

Quest'ultima si riscrive

$$-\sqrt{-\frac{b^3}{27}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7 \quad -\frac{|b|}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7$$

ma essendo  $b < 0$  si ha

$$-\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7.$$

Poiché entrambi i membri appaiono essere positivi, eleviamo al quadrato ed esplicitiamo  $b^3$

$$\frac{4}{9}b^2 \left(-\frac{b}{3}\right) > 49 \quad -\frac{4b^3}{27} > 49 \quad b^3 < -\frac{49 \cdot 27}{4}$$

da cui, estraendo la radice cubica

$$b < -3\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^2} \quad \text{che approssimativamente, significa} \quad b < (\approx -6,91).$$

Un possibile valore di  $b$  è pertanto  $b = -7$  (scelto intero solo per semplicità).

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La verifica dell'uguaglianza richiesta si ottiene ricordando l'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

per cui si ha

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 [\operatorname{arctg} x]_0^1. \quad (1)$$

Sostituendo a secondo membro gli estremi di integrazione ed eseguendo la differenza

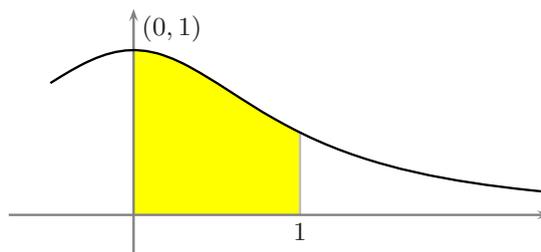
$$\pi = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) \quad \pi = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \quad \pi = \pi$$

come si voleva.

Per una stima numerica di  $\pi$  applicheremo il metodo dei rettangoli alla funzione

$$f : y = \frac{1}{1+x^2}$$

il cui grafico è del tipo già studiato nel problema 1. La funzione  $f$  è in effetti rappresentativa della versiera di Gaetana Agnesi quando si ponga  $a = 1$ . Il grafico è quindi



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $y = 1/(1+x^2)$ .

Poiché l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{A}$$

si interpreta geometricamente come l'area  $\mathcal{A}$  della regione (trapezoide) sottostante al grafico della funzione integranda (in giallo nella fig. 1), possiamo ottenere una stima di quest'area suddividendo l'intervallo  $[0, 1]$  in  $n$  intervalli di uguale ampiezza e ricoprendola di rettangoli. Scegliamo  $n = 5$  per cui l'ampiezza di ciascuno sarà  $h = (1 - 0)/5 = 0,2$  e identifichiamo l'altezza dei rettangoli con il valore di  $f$  calcolato nel punto medio di ciascuno dei 5 intervalli (fig. 2). Una stima dell'area è quindi data dall'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{i=0}^4 h \cdot f\left[0 + \frac{h}{2}(2i + 1)\right] \\ &= 0,2[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)] \\ &= 0,2[0,9901 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5529] \approx 0,7862. \end{aligned}$$

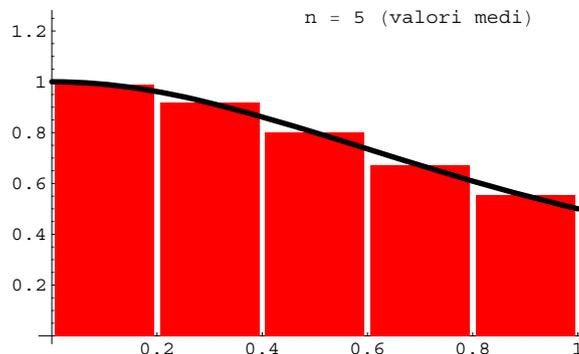


Fig. 2.

Ripresa l'uguaglianza (1), segue che una stima di  $\pi$  risulta

$$\pi = 4 \cdot \mathcal{A} \approx 4 \cdot 0,7862 = 3,1449.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

L'integrale definito proposto dal quesito si può ricondurre al volume di un solido di rotazione attorno all'asse delle  $x$  non appena si tenga presente la formula

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

che rappresenta il volume generato da una rotazione attorno all'asse  $x$  di  $2\pi$  della regione compresa tra  $f(x)$ , l'asse  $x$  e le rette di equazione  $x = a$  e  $x = b$ . Pertanto riscrivendo l'integrale dato come

$$\int_0^1 \pi x^3 dx = \pi \int_0^1 x^3 dx$$

possiamo identificare  $[f(x)]^2 = x^3$  cioè  $f(x) = \sqrt{x^3}$  con  $x \in [0, 1]$  e quindi il volume rappresentato risulta essere quello generato dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse della regione in colore della fig. 1. Il grafico rappresentato si ottiene facilmente osservando che risulta  $f(x) \geq 0$  quando  $0 \leq x \leq 1$  e che pure  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \geq 0$  nel medesimo intervallo.

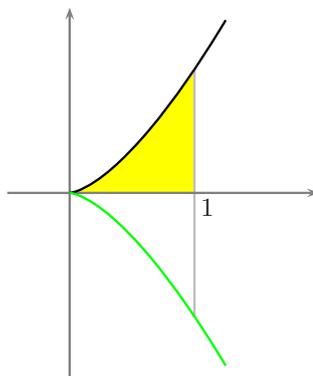


Fig. 1. Grafico approssimativo della funzione  $y = \sqrt{x^3}$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Della funzione  $f(x)$  sappiamo che  $f''(x) = \sin x$  e che  $f'(0) = 1$ . La prima si può pure scrivere come

$$\frac{df'}{dx} = \sin x \quad \text{o esplicitando } df', \quad df' = \sin x dx.$$

È quindi noto il differenziale di  $f'$  per cui integrando si ha

$$f'(x) = \int df' = \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

La costante di integrazione si determina con la seconda condizione  $f'(0) = 1$  che implica  $c - \cos 0 = 1$  per cui  $c = 2$ . Quindi  $f'(x) = 2 - \cos x$ . Procedendo nello stesso modo

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2 - \cos x \quad \implies \quad df = (2 - \cos x) dx$$

e integrando tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} df = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos x) dx = [2x - \operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 1.$$

Ricordando che per il teorema di Torricelli–Barrow

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} df = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$$

abbiamo in definitiva che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \pi - 1.$$

In alternativa, ottenuto l'integrale indefinito

$$f(x) = \int df = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \operatorname{sen} x + c$$

si calcolano i due valori

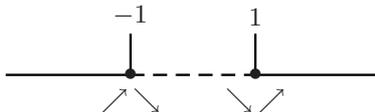
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 + c = \pi - 1 + c \quad f(0) = c$$

e quindi eseguendo la loro differenza si ottiene il medesimo risultato.

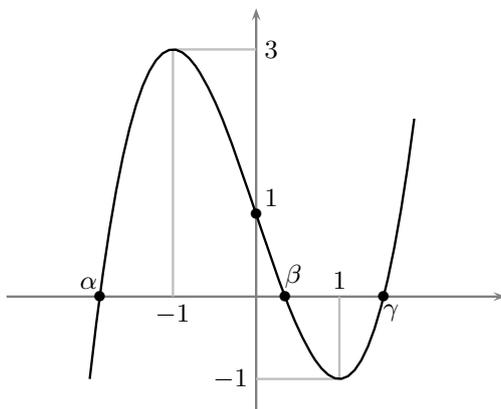
**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La risoluzione dell'equazione data si può ricondurre alla ricerca delle intersezioni della cubica  $y = x^3 - 3x + 1$  con l'asse delle  $x$ . Studiamo perciò il grafico di questa cubica tramite la sua derivata prima

$$y' = 3x^2 - 3 \geq 0 \quad \implies \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad x \leq -1 \quad \underline{\vee} \quad x \geq 1.$$



**Fig. 1.**



**Fig. 2.** Grafico approssimativo di  $y = x^3 - 3x + 1$ .

La cubica possiede un massimo relativo in corrispondenza di  $x = -1$  mentre  $x = 1$  è un punto di minimo. Poiché  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ,  $f(-1) = 3 > 0$  e  $f(1) = -1 < 0$  la cubica deve intersecare, per il teorema degli zeri, in tre punti distinti l'asse delle  $x$  e tali da soddisfare alle disuguaglianze  $\alpha < -1$ ,  $-1 < \beta < 1$ ,  $\gamma > 1$  (fig. 1).

In particolare, avendo il punto di intersezione con l'asse  $y$  ordinata positiva  $y(0) = 1 > 0$ , la radice  $\beta$  deve appartenere, ancora per il teorema degli zeri, all'intervallo  $]0, 1[$ . Per calcolarne un'approssimazione applichiamo il metodo di bisezione. Considerando i punti medi degli intervalli via via individuati per la radice  $\beta$  abbiamo, in prima approssimazione,

$$\beta_1 = 0,5 \quad f(0,5) \approx -0,37 < 0 \quad \text{da cui} \quad 0 < \beta < 0,5.$$

Procedendo nello stesso modo

$$\begin{aligned} \beta_2 = 0,25 \quad f(0,25) &\approx 0,2656 > 0 &\implies & 0,25 < \beta < 0,5; \\ \beta_3 = 0,375 \quad f(0,375) &\approx -0,0723 < 0 &\implies & 0,25 < \beta < 0,375; \\ \beta_4 = 0,3125 \quad f(0,3125) &\approx 0,0930 > 0 &\implies & 0,3125 < \beta < 0,375. \end{aligned}$$

Alla prima cifra decimale corretta abbiamo in conclusione  $\beta \approx 0,3$ .

# ESAME 2004

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*

## • Problema n. 1

Sia  $f$  la funzione definita da:  $f(x) = 2x - 3x^3$ .

1. Disegnate il grafico  $G$  di  $f$ .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta  $y = c$  che interseca  $G$  in due punti distinti e le regioni finite di piano  $R$  e  $S$  che essa delimita con  $G$ . Precisamente:  $R$  delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta  $y = c$  e  $S$  delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$ .
3. Determinate  $c$  in modo che  $R$  e  $S$  siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di  $G$  con la retta  $y = c$ ;
4. determinare la funzione  $g$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

$ABC$  è un triangolo rettangolo di ipotenusa  $BC$ .

1. Dimostrate che la mediana relativa a  $BC$  è congruente alla metà di  $BC$ .
2. Esprimete le misure dei cateti di  $ABC$  in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con  $BC = \sqrt{3}$  metri, determinate il cono  $K$  di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di  $K$ .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Trovate due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.

Soluzione

2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Soluzione

3. Date un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .

Soluzione

4. Dimostrate che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione reale.

Soluzione

5. Di una funzione  $g(x)$ , non costante, si sa che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di  $g(x)$ .

Soluzione

6. Verificate che le due funzioni  $f(x) = 3 \log x$  e  $g(x) = \log(2x)^3$  hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

Soluzione

7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ . Quale è il valore di  $\delta$  che massimizza l'area del triangolo?

Soluzione

8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

Soluzione

9. Calcolate:  $\int_0^1 \arcsen x \, dx$ .

Soluzione

10. Considerate gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ; quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

La funzione  $f$  assegnata è una cubica di dominio  $\mathbb{R}$  che si può riscrivere nella forma

$$f(x) = 2x - 3x^3 = x(2 - 3x^2).$$

Da questa discende che

$$f(-x) = (-x)[2 - 3(-x)^2] = -x(2 - 3x^2) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

per cui appare una funzione dispari con il grafico  $G$  simmetrico rispetto all'origine  $O$  di un normale sistema cartesiano.

- Il segno,  $f(x) \geq 0$  dipende dai due fattori

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad 2 - 3x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

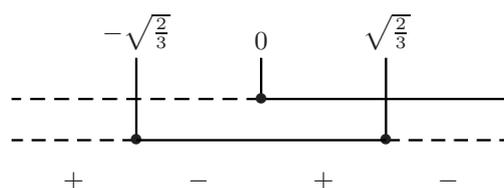


Fig. 1.

per cui si ha  $f(x) \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

- Lo studio dei limiti comporta l'analisi di  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  che si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( -3 + \frac{2}{x^2} \right) = \mp\infty$$

in quanto valgono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -3 + \frac{2}{x^2} = -3 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty.$$

Inoltre le cubiche non posseggono asintoti obliqui come conferma la ricerca di un eventuale coefficiente angolare basata sul limite

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 - 3x^2 = -\infty.$$

- Il calcolo della derivata prima fornisce  $f'(x) = 2 - 9x^2$  mentre lo studio del suo segno  $f'(x) \geq 0$  implica  $2 - 9x^2 \geq 0$  risolta da  $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

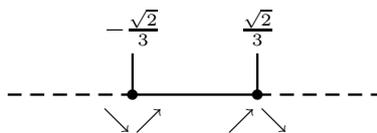


Fig. 2.

La funzione presenta quindi un massimo ed un minimo relativi propri. Il valore di  $f$  in corrispondenza del punto di massimo è

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27} = \frac{4}{9}\sqrt{2}.$$

- La derivata seconda  $f''(x) = -18x \geq 0$  mostra che la concavità è rivolta verso l'alto quando  $x \leq 0$  cosicché il grafico  $G$  è rappresentato in fig. 4

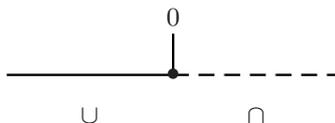


Fig. 3.

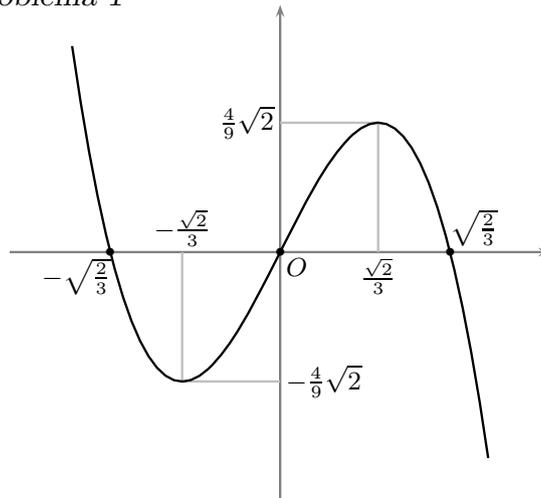


Fig. 4. Grafico  $G$  della funzione  $f$ .

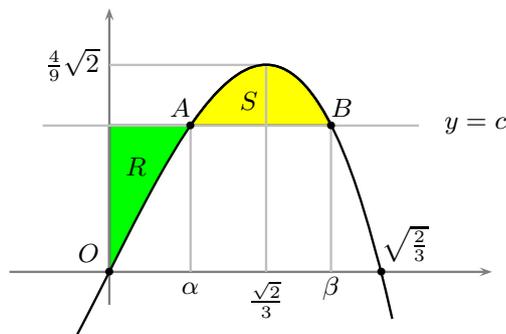


Fig. 5. Regioni  $R$  e  $S$ .

2) La richiesta del secondo punto consiste nel riconoscere le due regioni  $R$  e  $S$ . La prima,  $R$ , delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta orizzontale  $y = c$  ed evidenziata in giallo in fig. 5, la seconda  $S$ , delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$  appare in verde.

Al fine di determinare il parametro  $c$  (domanda 3 del testo) indichiamo con  $A$  e  $B$  i punti di intersezione della retta orizzontale con il grafico  $G$  e con  $\alpha$  e  $\beta$  le rispettive ascisse. Abbiamo pertanto

$$0 \leq c \leq \frac{4}{9}\sqrt{2} \quad A(\alpha, c), \quad B(\beta, c).$$

Le ascisse  $\alpha$  e  $\beta$  sono evidentemente le soluzioni dell'equazione  $2x - 3x^3 = c$  ottenuta dal sistema

$$\begin{cases} y = c \\ y = 2x - 3x^3 \end{cases} \quad (1)$$

quando  $0 \leq c \leq \frac{4}{9}\sqrt{2}$  con l'eliminazione di  $y$  ma, poiché la medesima retta incontra  $G$  pure in un ulteriore terzo punto di ascissa negativa, le incognite  $\alpha$  e  $\beta$  non rappresentano tutte le soluzioni dell'equazione. Comunque di certo risulta

$$2\alpha - 3\alpha^3 = c \quad 2\beta - 3\beta^3 = c.$$

Non potendo risolvere direttamente l'equazione  $3x^3 - 2x + c = 0$  in quanto di terzo grado e parametrica, non resta che porre la condizione dell'equivalenza delle aree delle regioni  $R$  e  $S$ .

3) Poiché l'area della regione  $S$  è espressa da

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{\alpha}^{\beta} (2x - 3x^3 - c) dx = \left[ 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} - cx \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 - c\beta - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 + c\alpha \end{aligned}$$

mentre per  $R$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_0^{\alpha} [c - (2x - 3x^3)] dx = \int_0^{\alpha} (c - 2x + 3x^3) dx \\ &= \left[ cx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^{\alpha} = c\alpha - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

la condizione  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  si esplicita nell'equazione

$$\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 - c\beta - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 + c\alpha = c\alpha - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4$$

da cui

$$-c\beta + \beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 = 0 \quad \text{per cui, se } \beta \neq 0,$$

abbiamo

$$c = \beta - \frac{3}{4}\beta^3.$$

Quest'ultima costituisce una seconda equazione nelle incognite  $c$  e  $\beta$  mentre la prima si era dedotta dal fatto che  $\beta$  doveva essere una soluzione del sistema (1). Possiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} c = 2\beta - 3\beta^3 \\ c = \beta - \frac{3}{4}\beta^3 \end{cases} \implies 2\beta - 3\beta^3 = \beta - \frac{3}{4}\beta^3$$

Ne discende  $\beta - \frac{9}{4}\beta^3 = 0$  da cui  $\beta = 0$  che è un valore privo di significato e

$$1 - \frac{9}{4}\beta^2 = 0 \implies \beta^2 = \frac{4}{9} \quad \beta = \pm \frac{2}{3}.$$

Di questi va accettato solo il valore positivo  $\beta = \frac{2}{3}$  in quanto la discussione ha luogo, come dice il testo, nel I quadrante. In corrispondenza il valore di  $c$  risulta

$$c = 2 \left( \frac{2}{3} \right) - 3 \left( \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}. \quad (2)$$

Rimane infine da determinare  $\alpha$  che, come **detto**, è soluzione di  $2x - 3x^3 = \frac{4}{9}$ . Poiché di questa equazione conosciamo ora la soluzione  $\beta = \frac{2}{3}$  possiamo con il metodo di Ruffini evidenziare un fattore di primo grado: pertanto da  $3x^3 - 2x + \frac{4}{9} = 0$  discende

$$\begin{array}{c|ccc|c} \frac{2}{3} & 3 & 0 & -2 & \frac{4}{9} \\ & & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ \hline & 3 & 2 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

per cui

$$3x^3 - 2x + \frac{4}{9} = \left( x - \frac{2}{3} \right) \cdot \left( 3x^2 + 2x - \frac{2}{3} \right) = 0.$$

Ne segue l'equazione

$$3x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{risolta da} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3} :$$

scartata ancora la soluzione negativa, otteniamo infine  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$ .

4) Per determinare la funzione  $g$  simmetrica di  $f$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ , valore trovato nel punto **precedente**, è sufficiente particularizzare le equazioni di una generica simmetria di asse  $y = c$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2x \end{cases}$$

oppure dedurle dalla condizione che il punto medio  $M$  del segmento  $PP'$  (fig. 6) appartenga all'asse di simmetria cioè

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y + y'}{2} = c. \end{cases}$$

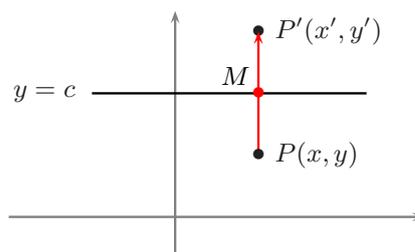


Fig. 6.

Si giunge quindi alla

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' + \frac{8}{9} \end{cases}$$

Sostituendo in  $y = 2x - 3x^3$  si ottiene

$$-y' + \frac{8}{9} = 2x' - 3(x')^3 \quad \implies \quad y' = 3(x')^3 - 2x' + \frac{8}{9}$$

ossia lasciando cadere gli indici,  $y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$ . Nella figura 7 si rappresentano i grafici di  $f$  e  $g$  e la retta asse della simmetria.

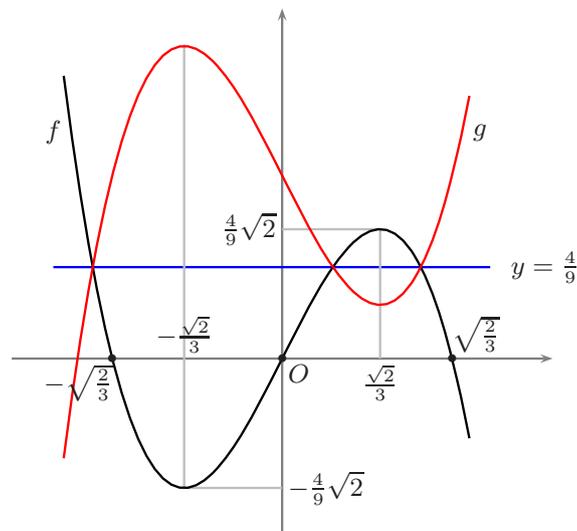


Fig. 7. Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1) Ci sono diversi modi per dimostrare la tesi che la mediana  $AM$  relativa all'ipotenusa  $BC$  di un triangolo rettangolo  $\triangle ABC$ , è congruente alla metà di  $BC$  cioè che  $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC}$ , essendo  $M$  il punto medio di  $BC$ .

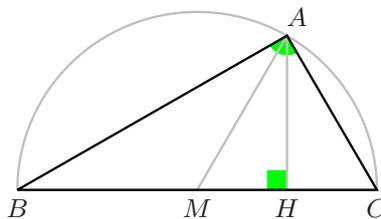


Fig. 1.

Si può partire dal fatto che  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  per cui, con riferimento alla fig. 1, segue che  $\triangle ABC$  è inscritto in una semicirconferenza per cui  $\overline{BM} = \overline{MC}$  e quindi pure  $\overline{AM} = \overline{MC}$  in quanto raggi della medesima circonferenza.

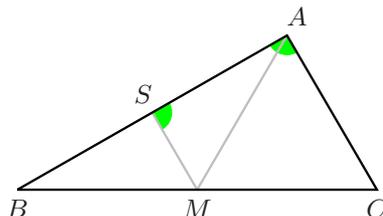


Fig. 2.

In alternativa (fig. 2), tracciata la parallela a  $AC$  per  $M$  e detta  $S$  la sua intersezione con  $AB$ , il teorema di Talete sulle rette parallele tagliate da due trasversali assicura che da  $\overline{BM} = \overline{MC}$  discende pure  $\overline{BS} = \overline{SA}$ . Ma  $\angle ASM = \frac{\pi}{2}$  per cui  $MS$  è mediana ed altezza di  $\triangle ABM$ . Quindi  $\triangle ABM$  è isoscele con  $\overline{BM} = \overline{AM}$ .

2) Posto per comodità la misura di  $\overline{BC} = 2a$  e  $\overline{AH} = h$  (fig. 1) con  $a$  e  $h$  parametri assegnati, per esprimere i cateti di  $\triangle ABC$  determiniamo in base al teorema di Pitagora  $\overline{MH}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AH}^2$  cioè

$$\overline{MH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

Ne segue che  $\overline{HC} = \overline{MC} - \overline{MH} = a - \sqrt{a^2 - h^2}$  per cui, per il secondo teorema di Euclide  $\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{BC}$  e quindi

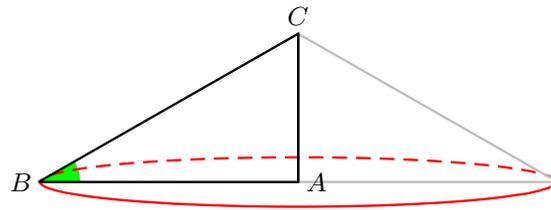
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{2a \left( a - \sqrt{a^2 - h^2} \right)}.$$

Il teorema di Pitagora (o anche il secondo di Euclide) ora permette di ottenere

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4a^2 - \left( 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - h^2} \right)} \\ &= \sqrt{2a \left( a + \sqrt{a^2 - h^2} \right)} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}}. \end{aligned}$$

3) Posto  $\overline{BC} = 2a = \sqrt{3}$  m da cui  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  m, continuiamo per comodità ad utilizzare il parametro  $a$  ed esprimiamo il volume del cono  $K$  di altezza  $AC$  e raggio di base  $AB$ . Con riferimento alla fig. 3, introduciamo una variabile angolare  $x = \angle ABC$ , con  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Allora  $\overline{AB} = 2a \cos x$ ,  $\overline{AC} = 2a \sin x$  per le relazioni trigonometriche in un triangolo rettangolo e  $\overline{AH} = \overline{AB} \sin x = 2a \sin x \cos x$ . Il volume  $\mathcal{V}$  diviene ora



**Fig. 3.** Solido di rotazione (cono) di  $\triangle ABC$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \left( \pi \overline{AB}^2 \right) \overline{AC} \\ &= \frac{1}{3} \pi (2a \cos x)^2 \cdot 2a \sin x = \frac{8}{3} a^3 \pi \sin x \cos^2 x \end{aligned}$$

Con le condizioni geometriche abbiamo quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{8}{3} a^3 \pi \sin x \cos^2 x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Passando al calcolo della derivata prima si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{8}{3} a^3 \pi [\cos x \cos^2 x + \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x)] \\ &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x) = \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (\cos^2 x - 2 + 2 \cos^2 x) \\ &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (3 \cos^2 x - 2) \end{aligned}$$

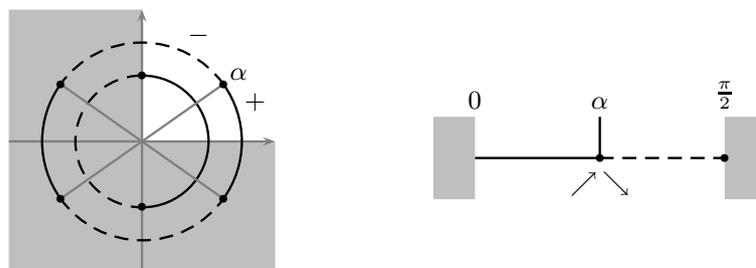
per cui il suo segno dipende dai fattori,

$$\begin{aligned} \cos x \geq 0 &\implies -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3 \cos^2 x - 2 \geq 0 &\implies \cos^2 x \geq \frac{2}{3} \implies \cos x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \vee \quad \cos x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Posto  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ossia  $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35,26^\circ$ , le due ultime disequazioni elementari sono risolte per

$$-\alpha + k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi.$$

Combinando i segni dei due termini (fig. 4) e considerando le limitazioni geometriche, ne deriva che  $\mathcal{V}' \geq 0$  se  $0 < x \leq \alpha$ .



**Fig. 4.** Segno di  $\mathcal{V}'$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Il massimo del volume si ottiene quindi quando  $x = \alpha$  dove

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ne segue che la capacità del cono  $K$  risulta ( $a = \sqrt{3}/2$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{max} &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9\sqrt{3}} \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \text{ metri}^3 \\ &= \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3 = \frac{2\pi}{3} \times 10^3 \text{ litri} \approx 2094,39 \text{ litri.} \end{aligned}$$

Volendo invece sfruttare in parte quanto svolto nel punto precedente si può seguire un metodo risolutivo che sfrutta una variabile lineare anziché una angolare. Osservati quindi i risultati del punto precedente, converrà porre come incognita la misura (con segno) del segmento orientato  $MH$  ossia  $x = MH$  con  $-a \leq x \leq a$  e questo per evitare che, ponendo l'altezza  $h$  come incognita le relazioni si complicano eccessivamente data la presenza di radicali entro radicali. Ne segue immediatamente che

$$\overline{AB} = \sqrt{2a(a+x)} \quad \overline{AC} = \sqrt{2a(a-x)},$$

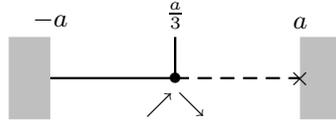
e il volume risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} = \frac{\pi}{3} [2a(a+x)] \cdot \sqrt{2a(a-x)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} (a+x) \sqrt{a-x}. \end{aligned}$$

Il calcolo di  $\mathcal{V}'$  conduce all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left( \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left[ \frac{2(a-x) - a - x}{2\sqrt{a-x}} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left( \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}} \right). \end{aligned}$$

L'unico termine non positivo nell'ultima espressione è il numeratore del termine entro parentesi per cui sarà  $\mathcal{V}' \geq 0$  se  $a - 3x \geq 0$  cioè  $x \leq \frac{a}{3}$ .



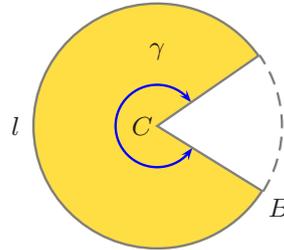
**Fig. 5.** Segno di  $\mathcal{V}'$ .

Il segno della derivata (fig. 5) mette quindi in evidenza come il volume  $\mathcal{V}$  sia crescente nell'intervallo  $[-a, \frac{a}{3}[$  e decrescente in  $] \frac{a}{3}, a[$ . Il volume massimo si ottiene in corrispondenza di  $x = \frac{a}{3}$  che comporta un valore per il volume

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \cdot \frac{4}{3} a^2 \sqrt{\frac{2}{3} a} = \frac{16}{9\sqrt{3}} \pi a^3 = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3$$

coincidente con quanto **già trovato**.

4) Lo sviluppo piano della superficie laterale di un cono assume la forma di un settore circolare di raggio pari all'apotema del cono (fig. 6): nel nostro caso l'apotema risulta l'ipotenusa  $BC$  del triangolo originario rappresentato in fig. 3.



**Fig. 6.** Sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

L'arco che definisce l'angolo al centro possiede lunghezza  $l$  pari alla circonferenza di base del cono  $K$  che, nel caso della **discussione** condotta con la variabile goniometrica è data da

$$l = 2\pi \cdot \overline{AB} = 2\pi(2a \cos \alpha) = 4\pi a \cos \alpha$$

dove  $\overline{AB}$  rappresenta il raggio di base del cono. Tenendo presente che la misura di un angolo in radianti è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio della circonferenza cui l'arco appartiene, l'angolo  $\gamma$  (in radianti) è espresso dal rapporto (fig. 6)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{l}{\overline{BC}} = \frac{2\pi \overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4\pi a \cos \alpha}{2a} \\ &= 2\pi \cos \alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 5,1302 \text{ radianti} \end{aligned}$$

per cui riportando tale valore in gradi decimali e sessagesimali abbiamo

$$\gamma \approx 5,1302 \text{ rad} = 293,9388^\circ = 293^\circ 56' 20''.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di risolvere l'equazione  $a + b = a \cdot b$  con la condizione  $a \neq b$  cioè il sistema

$$\begin{cases} a + b = a \cdot b \\ a \neq b. \end{cases}$$

Essendo questo costituito da un'unica equazione in due incognite, la sua soluzione generale sarà espressa da un insieme infinito di coppie  $(a, b)$  interpretabile come il grafico di una funzione nel piano cartesiano  $Oab$ .

Comunque procedendo algebricamente, esplicitiamo l'incognita  $b$ ,  $ab - b = a$  da cui  $b(a - 1) = a$  che per  $a = 1$  comporta l'assurdo  $0 = 1$ . Pertanto possiamo dividere per  $a \neq 1$  sapendo pure che  $a = 1$  non potrà essere soluzione dell'equazione. Si giunge alla

$$b = \frac{a}{a - 1}.$$

La condizione  $a \neq b$  implica ora

$$a \neq b \implies a \neq \frac{a}{a - 1} \implies a(a - 1) \neq a,$$

ossia

$$a^2 - a \neq a, \quad a^2 - 2a \neq 0 \implies a \neq 0 \wedge a \neq 2.$$

Pertanto qualsiasi coppia  $(a, b)$  che soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} b = \frac{a}{a - 1} \\ a \neq 0 \wedge a \neq 2 \end{cases}$$

è accettabile e risponde alle condizioni del testo.

Pur non richiesto, possiamo interpretare il risultato sopra nel piano cartesiano  $Oab$ : l'equazione ottenuta rappresenta una funzione omografica di asintoto verticale  $a = 1$  e asintoto orizzontale  $b = 1$ . Il suo grafico è quello di un'iperbole equilatera traslata che passa per l'origine  $O$  del sistema e dal quale sono esclusi i punti di ascissa nulla e pari a 2 (fig. 1). Nella figura sono inoltre evidenziate alcune coppie di punti  $(-2, \frac{2}{3})$ ,  $(3, \frac{3}{2})$ ,  $(5, \frac{5}{4})$  soluzioni del quesito.

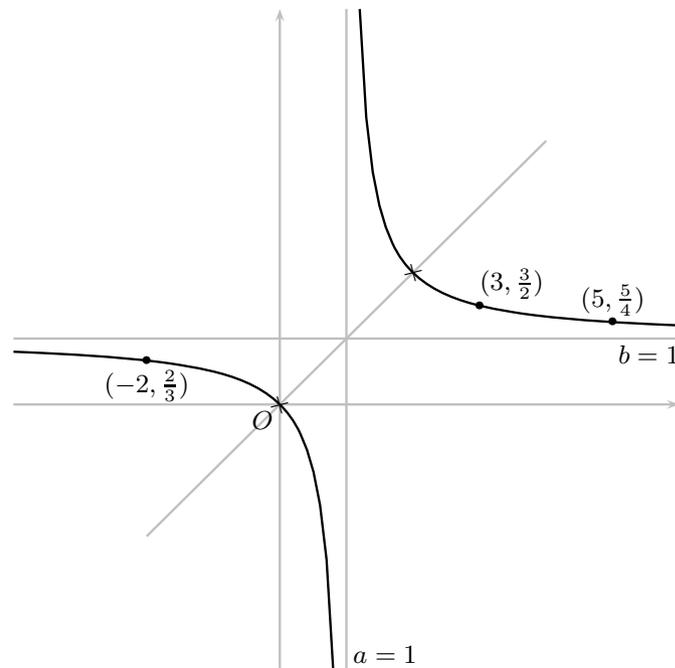


Fig. 1. Grafico dell'insieme risolutivo il quesito nel sistema  $Oab$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Un cilindro equilatero è definito come un cilindro che possiede l'altezza  $h$  pari al diametro  $2r$  delle sue basi. Posto allora (fig. 1)  $\overline{HN} = r$ , è  $\overline{MN} = 2r = \overline{PN}$  per cui l'area totale sarà data da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{cil} &= 2(\pi \cdot \overline{HN}^2) + (2\pi \cdot \overline{HN}) \cdot \overline{MN} \\ &= 2\pi r^2 + (2\pi r) \cdot (2r) = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 \\ &= 6\pi r^2. \end{aligned}$$

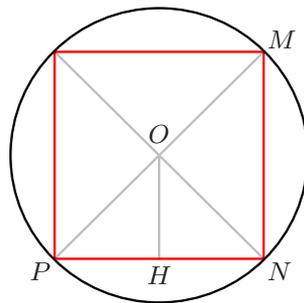


Fig. 1. Sezione piana del cilindro equilatero e della sfera.

Il raggio  $R$  della sfera circoscritta è invece  $R = \overline{OM} = \overline{ON} = r\sqrt{2}$  dato che la sezione del cilindro, ottenuta con un piano passante per il suo asse, forma un quadrato (fig. 1). L'area della superficie della sfera è pertanto

$$\mathcal{A}_{sf} = 4\pi R^2 = 4\pi(r\sqrt{2})^2 = 8\pi r^2$$

e il rapporto richiesto diviene

$$\frac{\mathcal{A}_{cil}}{\mathcal{A}_{sf}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Tra le infinite possibilità di scelta che il quesito presenta, ci rivolgiamo all'ampia classe delle funzioni derivabili tra le quali le cubiche possono soddisfare le caratteristiche richieste potendo presentare sia un minimo che un massimo.

Identifichiamo quindi la funzione  $f(x)$  con una cubica, la cui equazione generale è  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . L'appartenenza dei punti  $A(1, 3)$  e  $B(-1, 2)$  a tale funzione comporta le due condizioni

$$\begin{cases} 3 = a + b + c + d \\ 2 = -a + b - c + d \end{cases}$$

mentre, calcolata la derivata prima  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  e, dovendo questa essere nulla nei punti di estremo cioè  $f'(\pm 1) = 0$ , ne derivano altre due equazioni

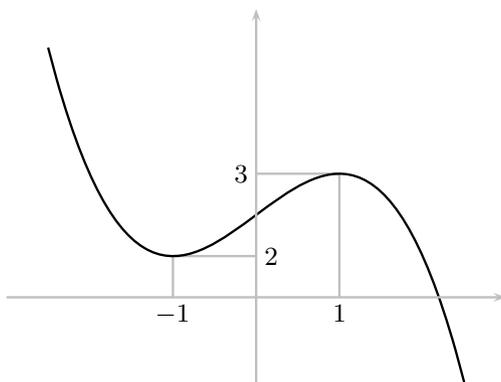
$$\begin{cases} 0 = 3a + 2b + c \\ 0 = 3a - 2b + c. \end{cases}$$

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3 = a + b + c + d \\ 2 = -a + b - c + d \\ 0 = 3a + 2b + c \\ 0 = 3a - 2b + c. \end{cases}$$

Sommando le prime due si ha  $5 = 2b + 2d$ , da cui  $d = \frac{5}{2} - b$ . Sommando la terza e quarta si ha  $6a + 2c = 0$  per cui  $c = -3a$  che, sostituita nella seconda equazione assieme all'espressione trovata per  $d$ , fornisce

$$2 = -a + b + 3a + \frac{5}{2} - b \implies 2a = 2 - \frac{5}{2} \quad a = -\frac{1}{4}$$



**Fig. 1.** Grafico di una funzione cubica con estremi in  $x = \pm 1$ .

e quindi

$$c = \frac{3}{4}, \quad 0 = 3 \left( -\frac{1}{4} \right) + 2b + \frac{3}{4} \implies b = 0$$

e infine,

$$2 = \frac{1}{4} + 0 - \frac{3}{4} + d \implies d = \frac{5}{2}.$$

Pertanto tra le parabole cubiche, la funzione  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$  soddisfa alle condizioni del quesito:  $f(x)$  possiede inoltre il grafico riportato in figura 1.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione  $e^x + 3x = 0$  si può riscrivere anche come  $e^x = -3x$ , per cui posto  $y = e^x$  e, per transitività pure  $y = -3x$  assume la forma definitiva

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x. \end{cases}$$

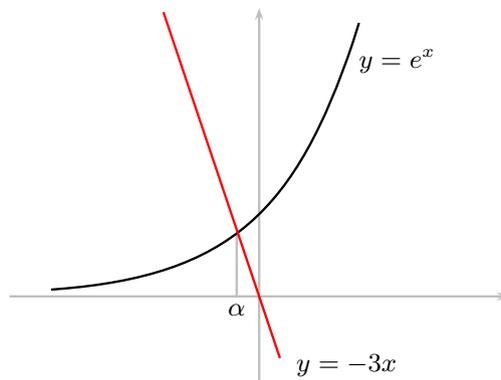
Ciò permette di interpretare le soluzioni dell'equazione originaria come le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni note  $y = e^x$  e  $y = -3x$ . La prima è la funzione esponenziale di base naturale mentre la seconda esprime una retta passante per l'origine di coefficiente angolare  $-3$ . La figura 1 rappresenta i grafici di entrambe le funzioni e mette in evidenza come questi non possano che intersecarsi in un solo punto di ascissa  $\alpha$  negativa.

Alternativamente, posto  $f : y = e^x + 3x$  con  $x \in \mathbb{R}$ , osserviamo che i limiti agli estremi del dominio di tale funzione valgono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty,$$

in quanto risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x = \pm\infty.$$



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $y = e^x$  e  $y = -3x$ .

Poiché  $y' = e^x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f$  risulta crescente e continua in tutto il suo dominio. Calcolata in  $x = 0$  vale  $f(0) = 1 > 0$  mentre in  $x = -1$  assume il valore  $f(-1) = e^{-1} - 3 < 0$ . Pertanto nell'intervallo chiuso  $[e^{-1} - 3, 0]$  è applicabile il teorema degli zeri delle funzioni continue che assicura l'esistenza di almeno un valore  $\alpha$  interno ad esso dove  $f(\alpha) = 0$ . Dato che  $f$  è pure monotona crescente nel medesimo intervallo, il valore  $\alpha$  è anche unico come assicura il teorema dell'esistenza della funzione inversa nell'ipotesi di funzioni continue e strettamente monotone in un intervallo. Difatti se esiste la funzione  $f^{-1}$  allora l'immagine di 0 secondo  $f^{-1}$  ossia  $\alpha = f^{-1}(0)$  dev'essere un unico valore. Con metodi numerici (si veda il quesito 9 dell'esame 2004 PNI) si può fornire una stima approssimata di  $\alpha$  ossia  $\alpha \approx -0,257628$ .

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Le condizioni espresse dal testo

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \\ g(2) = 4 \end{cases} \quad (1)$$

delineano una funzione  $g$  dotata di una discontinuità di terza specie o eliminabile in  $x = 2$  dato che i limiti destro e sinistro in 2 sono uguali e finiti mentre la funzione in tale punto assume un valore diverso. Tra le infinite possibili scelte potremmo rivolgerci ad una funzione definita in due insiemi: nel primo,  $\mathbb{R} - \{2\}$ ,  $g$  può pensarsi costituita da una qualsiasi funzione polinomiale di grado maggiore o eguale al primo, data la condizione che  $g$  non sia costante. Poiché un qualsiasi polinomio rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  l'unica condizione da imporre è che il punto  $(2, 4)$  appartenga al grafico del polinomio scelto in  $\mathbb{R}$ .

Per  $x \neq 2$  scegliamo quindi un'espressione polinomiale di secondo grado,  $y = 3 + (x - 2)^2$  che manifestamente soddisfa a tali condizioni (ma avremmo potuto

scegliere anche  $y = 3 + (x - 2)^3$  e così via). In  $x = 2$  siamo invece obbligati a porre  $g(2) = 4$ . In definitiva, una scelta per  $g$  potrebbe essere

$$g : \begin{cases} y = 3 + (x - 2)^2 & \text{se } x \neq 2 \\ y = 4 & \text{se } x = 2: \end{cases}$$

in tal modo entrambe le condizioni di (1) appaiono soddisfatte: il grafico di  $g$  è riportato in figura 1.

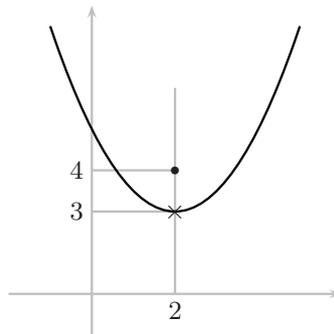


Fig. 1. Grafico di  $g$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il calcolo della derivata prima della funzione  $f(x) = 3 \ln x$  di dominio  $x > 0$  (intendiamo  $\log x = \ln x$ ) è immediato:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Posta, per la  $g$ , la condizione  $(2x)^3 > 0$  soddisfatta ancora da  $x > 0$  risulta

$$g'(x) = \frac{1}{2x^3} \cdot D(2x^3) = \frac{1}{2x^3} \cdot 2 \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$$

che conferma l'uguaglianza  $f'(x) = g'(x)$ . La giustificazione sta nel fatto che, per un teorema sulle funzioni derivabili, le due funzioni differiscono per una costante. Difatti, in base alle proprietà dei logaritmi e nel dominio già individuato,  $g$  si può riscrivere come

$$g(x) = \ln(2x)^3 = 3 \ln(2x) = 3(\ln 2 + \ln x) = 3 \ln 2 + 3 \ln x$$

per cui si ha  $g(x) = 3 \ln 2 + f(x)$  ossia  $g(x) - f(x) = 3 \ln 2$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $a = \overline{AC}$ ,  $b = \overline{AB}$  e  $\delta = \angle BAC$  (fig. 1) l'area di  $\triangle ABC$  risulta espressa da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \delta = \frac{1}{2}ab \sin \delta.$$

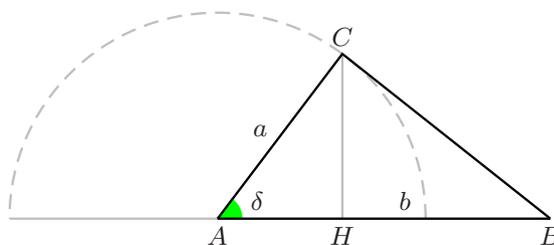


Fig. 1.

Poiché il vertice  $C$  potrà variare su una semicirconferenza di centro  $A$  e raggio  $a$ , l'angolo  $\delta$  assume solo i valori dell'intervallo  $0 \leq \delta \leq \pi$ . Evidentemente l'area è massima quando l'unico elemento variabile,  $\sin \delta$ , è massimo e ciò accade quando  $\sin \delta = 1$ . Pertanto l'unico valore accettabile è  $\delta = \frac{\pi}{2}$  e, in corrispondenza, il triangolo risulta rettangolo.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il grado *sessagesimale* si definisce come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. I suoi sottomultipli sono il *primo*, sessantesima parte del grado e il *secondo*, sessantesima parte del primo.

Il *radiante* viene invece identificato come la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio.

Infine, il grado *centesimale* risulta la quattrocentesima parte dell'angolo giro.

Tra radianti e gradi sessagesimali si utilizza la proporzione

$$\frac{\alpha(\text{rad})}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{che implica} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha(\text{rad}).$$

Posto  $\alpha(\text{rad}) = 1$  discende che

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,2958^\circ \approx 57^\circ 17' 44,8063''.$$

Tra gradi sessagesimali (indicati nei calcolatori tascabili con *deg*) e gradi centesimali (*grad*) sussiste invece la relazione

$$\frac{\alpha(\text{grad})}{\alpha^\circ} = \frac{400}{360} \quad \text{che implica} \quad 1 \text{ grad} = 0,9^\circ = 0^\circ 54''.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsen x \, dx$$

si può calcolare dopo aver determinato il corrispondente integrale indefinito. Questo si risolve procedendo per parti: di seguito presentiamo i due metodi principali.

a) Posto  $t = \arcsen x$  è pure  $x = \sen t$  e il differenziale risulta  $dx = \cos t \, dt$ . L'integrale iniziale si riscrive quindi come

$$\int \arcsen x \, dx = \int t \cos t \, dt$$

Identificato  $\cos t \, dt$  come il fattore differenziale avente per integrale  $\sen t$ , l'applicazione della regola per parti comporta

$$\int t \cos t \, dt = t \sen t - \int \sen t \, dt = t \sen t + \cos t + c.$$

Ritornando alla variabile originaria  $x$  e ricordato che  $\cos t = \sqrt{1 - \sen^2 t}$  ( $x \in [0, 1]$  e  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) giungiamo infine all'insieme di primitive

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

b) Il medesimo risultato viene fornito procedendo per parti dopo aver identificato il fattore differenziale con  $dx$ . Abbiamo in tal caso

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \arcsen x - \int D(\arcsen x) \, dx \\ &= x \arcsen x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ &= x \arcsen x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Posto ora  $x^2 = t$  per cui  $dt = 2x \, dx$ , risulta

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \arcsen x - \int \frac{\frac{1}{2} \, dt}{\sqrt{1 - t}} \\ &= x \arcsen x - \frac{1}{2} \int (1 - t)^{-\frac{1}{2}} \, dt \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1 - t)^{-\frac{1}{2}} (-dt) \end{aligned}$$

e dato che  $d(1 - t) = -dt$ , si ha

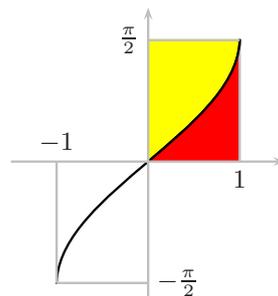
$$\begin{aligned}
 &= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c \\
 &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.
 \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale definito discende ora immediatamente:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx &= \left[ x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\
 &= 1 \operatorname{arcsen} 1 + \sqrt{1-1} - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

In alternativa, tenendo presente che l'integrale definito esprime anche l'area (con segno) del trapezoide compreso tra la funzione  $\operatorname{arcsen} x$  e l'asse delle ascisse (in rosso in fig. 1), il valore richiesto si può ottenere sottraendo dal rettangolo con i lati di lunghezza 1 e  $\frac{\pi}{2}$ , l'area  $\mathcal{A}$  della regione rappresentata in giallo in fig. 1 e fornita dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx.$$



**Fig. 1.** Area richiesta.

In tal caso i calcoli si riducono a

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -0 + 1 = 1$$

e quindi

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx = \left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \mathcal{A} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Indicata con  $f$  una generica funzione di  $A$  in  $B$  con  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ , la definizione di funzione

$$f : A \rightarrow B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B \text{ tale che } y = f(x)$$

chiarisce come debbano essere coinvolti tutti gli elementi di  $A$  mentre quelli di  $B$  non lo sono necessariamente. Si tratta quindi di mettere in corrispondenza gli stessi 4 elementi di  $A$  con quelli di  $B$  anche ripetendo lo stesso elemento. Per esempio, ciascuno dei blocchi presentati di seguito è rappresentativo di una diversa funzione.

$a$	$a$	$a$	$b$
1	2	3	4

$a$	$a$	$b$	$a$
1	2	3	4

$a$	$b$	$a$	$a$
1	2	3	4

$b$	$a$	$a$	$a$
1	2	3	4

...

Il numero totale di questi gruppi è pertanto il numero delle disposizioni di 3 oggetti in gruppi di 4, potendo gli oggetti (3 nel nostro caso) essere ripetuti. Dalla teoria del calcolo combinatorio questi gruppi formano le disposizioni con ripetizione e il loro numero è dato da

$$D'_{n,k} = n^k$$

essendo  $n$  il numero degli oggetti a disposizione distinti e  $k$  il numero degli elementi compresi in ogni gruppo.

Nel nostro caso abbiamo quindi  $D'_{3,4} = 3^4 = 81$ .

# ESAME 2004 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $\gamma$  la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove  $k$  e  $\lambda$  sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni  $\gamma$ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse  $x$  e i vertici del lato opposto su  $\gamma$ ;
3. sapendo che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  e assumendo  $\lambda = \frac{1}{2}$ , si trovi il valore da attribuire a  $k$  affinché l'area compresa tra  $\gamma$  e l'asse  $x$  sia 1;
4. per i valori di  $k$  e  $\lambda$  sopra attribuiti,  $\gamma$  è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss*, 1777–1855). Una *media*  $\mu \neq 0$  e uno *scarto quadratico medio*  $\sigma \neq 1$  come modificano l'equazione e il grafico?

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f$  la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti  $a$  e  $b$ , esiste sempre un valore di  $x$  tale che  $f(x) = \frac{a+b}{2}$ .
2. Si consideri la funzione  $g$  ottenuta dalla  $f$  ponendo  $a = 2b = 2$ . Si studi  $g$  e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per  $x > 0$  il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca

una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Soluzione

### Questionario

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

Soluzione

2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Soluzione

3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

Soluzione

4. Dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$  quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?

Soluzione

5. Dare un esempio di funzione  $g$ , non costante, tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Soluzione

6. Dare un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .

Soluzione

7. Tra i triangoli di base assegnata e di ugual area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

Soluzione

8. Si trovino due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.

Soluzione

9. Si dimostri che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimativo utilizzando un metodo iterativo a scelta.

Soluzione

10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\y &\rightarrow x + y\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1) Come detto più avanti nel testo del problema, la curva  $\gamma$  di equazione

$$\gamma : y = ke^{-\lambda x^2} \quad \text{con } k > 0 \quad \text{e} \quad \lambda > 0$$

è rappresentativa di un insieme di curve ben conosciute tra le quali rientra la gaussiana standard. Studiamone le proprietà.

- Il dominio di  $\gamma$  coincide con  $\mathbb{R}$  e, in questo dominio, la funzione che la rappresenta è simmetrica pari in quanto

$$f(-x) = ke^{-\lambda(-x)^2} = ke^{-\lambda x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico sarà quindi simmetrico rispetto all'asse delle  $y$ .

- Segno:  $f(x) > 0$  implica  $ke^{-\lambda x^2} > 0$  che, essendo  $k > 0$  così come per le proprietà dell'esponenziale  $e^{-\lambda x^2} > 0$ , è soddisfatta  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- La funzione è continua in tutto il dominio essendo composta di funzioni continue ( $e^z$  e  $z = -\lambda x^2$ ) e i suoi limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  sono:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k e^{-\lambda x^2} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x^2} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$$

avendo posto  $z = -\lambda x^2$ . L'asse delle ascisse è pertanto un asintoto orizzontale per  $\gamma$ .

- Il calcolo della derivata prima fornisce

$$y' = k \left[ e^{-\lambda x^2} \cdot (-2\lambda x) \right] = -2x(\lambda k) \cdot e^{-\lambda x^2}$$

e la condizione di positività  $y' \geq 0$  implica  $-2x \leq 0$  cioè  $x \leq 0$ . Il segno di  $y'$  è riassunto in fig. 1 e questo mostra come il punto  $x = 0$  debba essere un punto di massimo assoluto per  $\gamma$ .

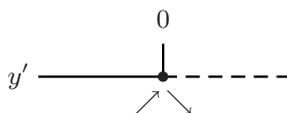


Fig. 1.

- La derivata seconda risulta

$$\begin{aligned} y'' &= D \left[ (-2k\lambda x) \cdot e^{-\lambda x^2} \right] \\ &= -2k\lambda \left[ e^{-\lambda x^2} + x \cdot (-2\lambda x) e^{-\lambda x^2} \right] \\ &= 2e^{-\lambda x^2} \cdot k\lambda(-1 + 2\lambda x^2) \end{aligned}$$

e  $y'' \geq 0$  comporta lo studio di  $-1 + 2\lambda x^2 \geq 0$  essendo tutti i rimanenti fattori positivi. Ne segue

$$2\lambda x^2 \geq 1, \quad x^2 \geq \frac{1}{2\lambda} \quad \Longrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Il segno complessivo appare in fig. 2 assieme alla disposizione delle concavità. Queste sono rivolte verso la direzione negativa dell'asse  $y$  quando  $x$  è interno all'intervallo  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right]$ .

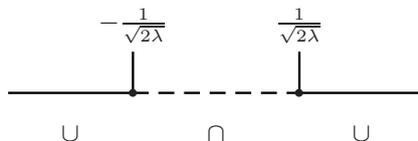
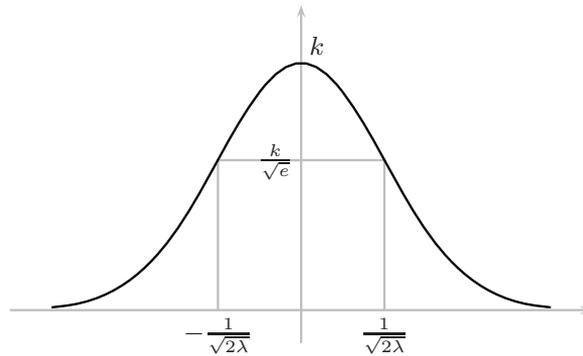


Fig. 2.

Le ascisse dei punti di flesso sono  $x = \pm 1/\sqrt{2\lambda}$  e le corrispondenti ordinate valgono

$$y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2\lambda}} = ke^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{e}}.$$

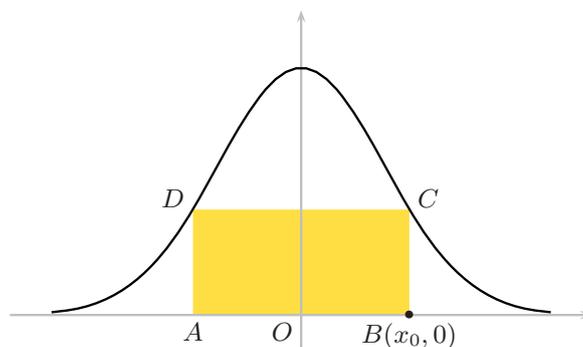
Notato che  $y(0) = k$ , proponiamo il grafico di  $\gamma$  nella figura 3.



**Fig. 3.** Grafico di  $\gamma$ .

2) Il rettangolo di cui si chiede l'area massima appare in fig. 4. Determiniamo l'area  $\mathcal{A}$  in funzione dell'ascissa  $x_0 \geq 0$  di  $B$ : per la simmetria già notata è quindi  $A(-x_0, 0)$  mentre l'ordinata di  $C$  risulta  $y_C = ke^{-\lambda x_0^2}$ . Poiché  $\mathcal{A} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2\overline{OB} \cdot \overline{BC}$  abbiamo

$$\mathcal{A}(x_0) = 2x_0 \cdot (ke^{-\lambda x_0^2}) = 2k(x_0 \cdot e^{-\lambda x_0^2}) \quad \wedge \quad x_0 \geq 0.$$



**Fig. 4.** Rettangolo compreso tra  $\gamma$  e l'asse  $x$ .

Uno studio di carattere geometrico agli estremi dell'insieme di variabilità  $[0, +\infty[$  di  $x_0$  suggerisce con evidenza che se  $x_0 = 0$  allora  $\mathcal{A} = 0$  così come,  $\mathcal{A}(x_0) \rightarrow 0$

se  $x_0 \rightarrow +\infty$  (seppur con minor evidenza). Passando comunque allo studio della derivata prima  $\mathcal{A}'$  abbiamo

$$\mathcal{A}'(x_0) = 2k \left[ e^{-\lambda x_0^2} + x_0(-2\lambda x_0)e^{-\lambda x_0^2} \right]$$

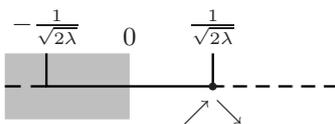
da cui

$$\mathcal{A}'(x_0) = 2ke^{-\lambda x_0^2} (1 - 2\lambda x_0^2)$$

la condizione  $\mathcal{A}' \geq 0$  implica lo studio del fattore  $1 - 2\lambda x_0^2 \geq 0$  in quanto il primo fattore è certamente positivo. Ne segue ( $\lambda > 0$ )

$$x_0^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

La **rappresentazione** grafica del segno di  $\mathcal{A}'$  mostra un andamento crescente dell'area per  $x_0 \in [0, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[$  e decrescente se  $x_0 > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ . Il massimo dell'area viene raggiunto in corrispondenza di  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ .



**Fig. 5.** Segno di  $\mathcal{A}'$ .

3) Assunto  $\lambda = \frac{1}{2}$  e sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (1)$$

dovremo riportare la condizione (che viene detta “di normalizzazione”) sull’area compresa tra  $\gamma$  e l’asse  $x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-x^2/2} dx = 1$$

in una forma simile alla (1). A tal fine, riscritta per comodità la condizione precedente in termini della variabile muta  $t$  anziché di  $x$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-x^2/2} dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-t^2/2} dt = 1,$$

poniamo  $t^2/2 = x^2$  cioè  $x = t/\sqrt{2}$ ,  $t = x\sqrt{2}$ , sostituzione che implica il legame tra differenziali  $dt = \sqrt{2} dx$ . Poiché inoltre se  $t \rightarrow \infty$  è anche  $x \rightarrow \infty$  discende

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \sqrt{2} dx = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Possiamo ora per l'integrazione sfruttare il valore fornito dalla (1) cosicché l'ultima espressione diviene

$$\sqrt{2} \cdot k \cdot \sqrt{\pi} = 1 \quad \text{da cui} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4) Con i valori  $\lambda = \frac{1}{2}$  e  $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  l'equazione di  $\gamma$  risulta

$$\gamma : y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

che costituisce l'equazione di una curva gaussiana standard corrispondente ad una media  $\mu = 0$  e scarto quadratico medio o deviazione standard  $\sigma = 1$ . Il valore del massimo è, per quanto visto,  $y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  raggiunto in  $x = 0$ , mentre i punti di flesso possiedono ascisse

$$x = \pm \frac{1}{2\lambda} = \pm 1.$$

Se  $\mu \neq 0$  e  $\sigma \neq 1$ , l'equazione della gaussiana diviene

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Le coordinate del punto di massimo sono

$$M\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

mentre i punti di flesso sono in tal caso  $x = \mu \pm \sigma$ . Le corrispondenti ordinate risultano

$$y(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}.$$

Il grafico subisce le variazioni discusse nei punti seguenti:

- $\mu \neq 0$  e  $\sigma = 1$ . Il grafico risulta traslato orizzontalmente di un tratto pari a  $\mu$  rispetto alla gaussiana standard. Pertanto risulta simmetrico rispetto alla retta  $x = \mu$  (fig. 6)
- Se invece  $\sigma > 1$ , la gaussiana risulta allargata orizzontalmente in quanto l'ampiezza dell'intervallo con estremi le ascisse dei suoi **punti di flesso** aumenta proporzionalmente dato che questa risulta pari a  $2\sigma$ . Per la condizione di normalizzazione (il valore dell'area sottostante alla curva dev'essere sempre unitario) l'ordinata del massimo deve diminuire. Difatti essa diminuisce in proporzione

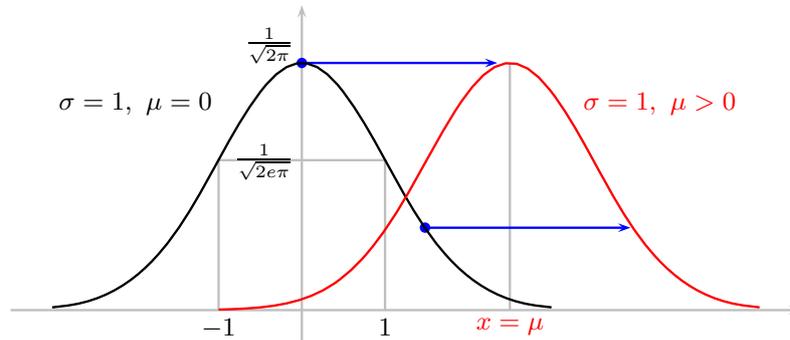


Fig. 6. Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$ .

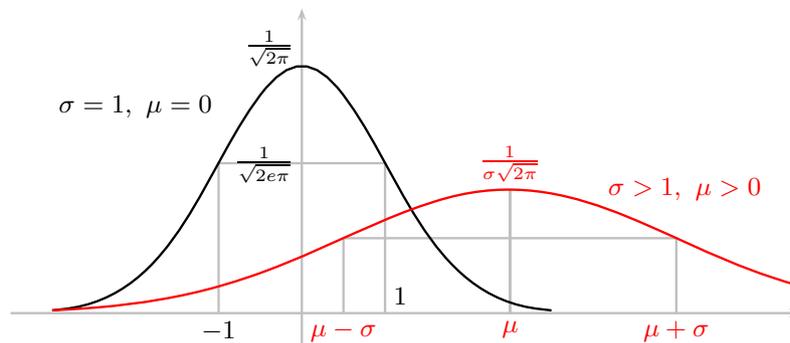


Fig. 7. Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$  e  $\sigma > 1$ .

inversa a  $\sigma$  in quanto, **come visto**, vale  $y_M = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . Una esemplificazione di tali variazioni appare nei grafici di fig. 7.

c) Se, infine,  $0 < \sigma < 1$ , il grafico (fig. 8) appare sempre simmetrico rispetto alla retta  $x = \mu$  ma l'ampiezza dell'intervallo definito dai punti di flesso diminuisce e il valore del massimo aumenta. In sostanza la curva si restringe attorno al valor medio  $\mu$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

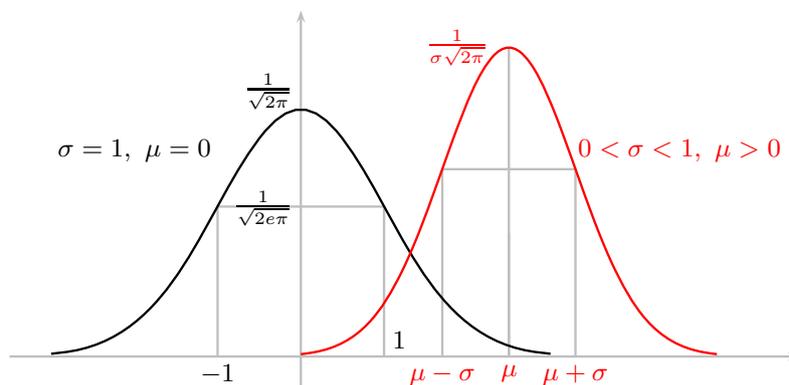
La funzione assegnata

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x \quad D = \mathbb{R} \quad \wedge \quad a, b \neq 0$$

possiede il dominio  $D = \mathbb{R}$  in quanto costituita dalla somma di un termine di primo grado con il prodotto delle funzioni seno e coseno, tutte e tre definite in  $\mathbb{R}$ .

Notiamo innanzitutto che il calcolo di  $f$  in  $a$  fornisce

$$f(a) = \operatorname{sen}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2b}a\right) + a = 0 + a = a$$



**Fig. 8.** Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$  e  $0 < \sigma < 1$ .

mentre in  $x = b$ ,

$$f(b) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} b \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + b = 0 + b = b,$$

per cui, agli estremi dell'intervallo  $[a, b]$  di  $x$  (abbiamo assunto che  $a < b$ ), la funzione assume gli stessi valori della variabile indipendente. In sostanza i punti  $(a, a)$  e  $(b, b)$  appartengono al grafico della funzione (così come alla bisettrice del I e III quadrante).

Poiché  $f(x)$  è somma di  $x$ , funzione come detto definita in  $\mathbb{R}$  e ivi continua, e di  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{2b} x \right)$ , termine ottenuto dal prodotto di funzioni continue,  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right)$  e  $\cos \left( \frac{\pi}{2b} x \right)$ , in quanto ciascun fattore risulta dalla composizione di funzioni continue, ne discende che  $f(x)$  è a sua volta continua in  $[a, b]$  (ma pure in tutto  $\mathbb{R}$ ).

Il teorema di *esistenza dei valori intermedi* nell'ipotesi che  $f$  sia una funzione continua in un intervallo chiuso  $[a, b]$ , assicura che  $f$  assuma tutti i valori compresi tra il suo minimo  $m$  e il suo massimo  $M$ . Ora poiché possiamo supporre valide in  $[a, b]$  le disequaglianze

$$m \leq f(a) \leq M \quad m \leq f(b) \leq M$$

assieme alla relazione

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b,$$

diretta conseguenza di  $a < b$ , per **quanto osservato** circa i valori agli estremi della funzione, quest'ultima si può riscrivere come

$$f(a) \leq \frac{a+b}{2} \leq f(b).$$

Ma per le precedenti è anche

$$m \leq f(a) \leq \frac{a+b}{2} \leq f(b) \leq M$$

per cui il valore  $(a+b)/2$  risulta certamente compreso tra il minimo e il massimo di  $f$  in  $[a, b]$ . Possiamo pertanto concludere in base al teorema enunciato che deve esistere almeno un valore  $c$  della variabile indipendente tale che

$$f(c) = \frac{a+b}{2} \quad \text{con} \quad c \in [a, b].$$

2) Posto  $a = 2b = 2$  la funzione  $g$  da studiare risulta

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2} \sin(\pi x) + x \quad x \in \mathbb{R}$$

dove si è sfruttata l'identità goniometrica  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . L'ultima forma mostra come la  $g$  sia somma di due funzioni note,  $h(x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x)$  e  $i(x) = x$ . La prima risulta una funzione sinusoidale di ampiezza  $\frac{1}{2}$  e periodicità  $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$  in quanto vale l'identità in  $\mathbb{R}$

$$h(x+2) = \frac{1}{2} \sin \pi(x+2) = \frac{1}{2} \sin(\pi x + 2\pi) = h(x).$$

Sommata alla funzione identità,  $i(x) = x$ , possiamo intuire il possibile grafico di  $g(x)$ : questo dovrebbe mostrare delle oscillazioni attorno alla bisettrice dei I e III quadrante intersecandola nei punti di ascissa  $x = k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  dove  $h(k) = 0$ . Procediamo comunque con lo studio formale.

• Dato che

$$g(-x) = \frac{1}{2} \sin[\pi(-x)] + (-x) = -\frac{1}{2} \sin(\pi x) - x = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la funzione risulta dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine.

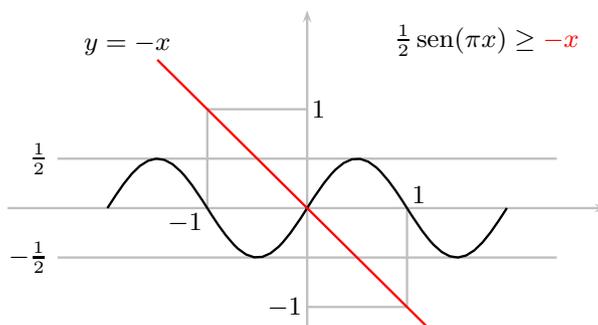
•  $g(x)$  non è periodica in quanto

$$g(x+2) = h(x+2) + (x+2) = h(x) + x + 2 \neq g(x).$$

• Lo studio del segno di  $g$  implica la risoluzione della disequazione  $g(x) \geq 0$  ossia di

$$\frac{1}{2} \sin(\pi x) + x \geq 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \sin(\pi x) \geq -x$$

che non può essere risolta con metodi analitici dato che presenta sia funzioni razionali che trascendenti. L'ultima disequazione si può comunque interpretare



**Fig. 1.** Interpretazione grafica della disequazione  $\frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \geq -x$ .

graficamente come il confronto tra i grafici della funzione **già discussa**  $h(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x)$  con la retta  $y_2 = -x$ , entrambi noti (fig. 1)

Notato che i grafici si intersecano nell'origine e che per  $x = 1$  risulta  $y_2(1) = -1$  quando il minimo di  $h(x)$  vale  $-\frac{1}{2}$ , concludiamo che  $g(x) \geq 0$  per  $x \geq 0$ .

- Essendo  $g$  continua in tutto  $\mathbb{R}$  dobbiamo calcolare solo i limiti all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x).$$

Dato che  $-1 \leq \text{sen}(\pi x) \leq 1$  la divisione per 2 comporta pure

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \leq \frac{1}{2}$$

per cui, sommando  $x$  a tutti i membri, si ottiene che la funzione  $g$  soddisfa alle disuguaglianze

$$-\frac{1}{2} + x \leq \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) + x \leq \frac{1}{2} + x \quad -\frac{1}{2} + x \leq g(x) \leq \frac{1}{2} + x.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \mp \frac{1}{2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \mp \frac{1}{2} = +\infty,$$

possiamo affermare in base al teorema del confronto che dev'essere pure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty.$$

Questo risultato potrebbe suggerire la presenza per la  $g$  di asintoti obliqui: pertanto va studiato il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} + 1.$$

Ancora per le limitazioni già viste, valgono le disuguaglianze (consideriamo  $x > 0$ )

$$-\frac{1}{2x} \leq \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} \leq \frac{1}{2x};$$

assieme al limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{1}{2x} = 0,$$

il teorema del confronto permette di concludere ancora che

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Il limite per  $q$  è invece

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) + x \right] - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) = \nexists$$

ma tale limite non esiste in quanto la funzione ad argomento è periodica. Non vi possono essere pertanto asintoti obliqui.

- Il calcolo della derivata prima fornisce

$$g'(x) = \frac{1}{2}\pi \cos(\pi x) + 1 = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x) + 1$$

per cui  $g'(x) \geq 0$  se

$$\frac{\pi}{2} \cos(\pi x) + 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(\pi x) \geq -\frac{2}{\pi};$$

posto

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) \approx 2,2609 = 129,54^\circ,$$

discende (fig. 2)

$$-\alpha + 2k\pi \leq \pi x \leq \alpha + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\alpha}{\pi} + 2k \leq x \leq \frac{\alpha}{\pi} + 2k.$$

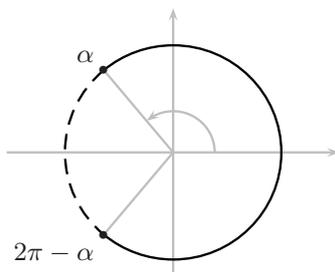


Fig. 2.

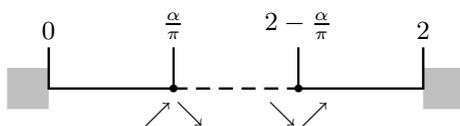


Fig. 3.

Per  $x \in [0, 2]$  il segno della  $g'$  è rappresentato in fig. 3 dove appaiono pure le indicazioni di crescita e decrescenza.

- La derivata seconda risulta

$$g''(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi \operatorname{sen}(\pi x) = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$$

e la condizione  $g''(x) \geq 0$  comporta  $-\operatorname{sen}(\pi x) \geq 0$  e quindi  $\operatorname{sen}(\pi x) \leq 0$ . Questa è risolta dagli intervalli

$$\pi + 2k\pi \leq \pi x \leq 2\pi + 2k\pi \implies 1 + 2k \leq x \leq 2 + 2k \quad k \in \mathbb{Z} :$$

in fig. 4 si riporta il segno di  $g''(x)$  e la disposizione delle concavità nell'intervallo  $[0, 2]$ . **Ricordando** che nei punti  $x = k$  la  $g(x)$  interseca la retta  $y = x$ , riportiamo in conclusione il suo grafico nella figura 5.



Fig. 4.

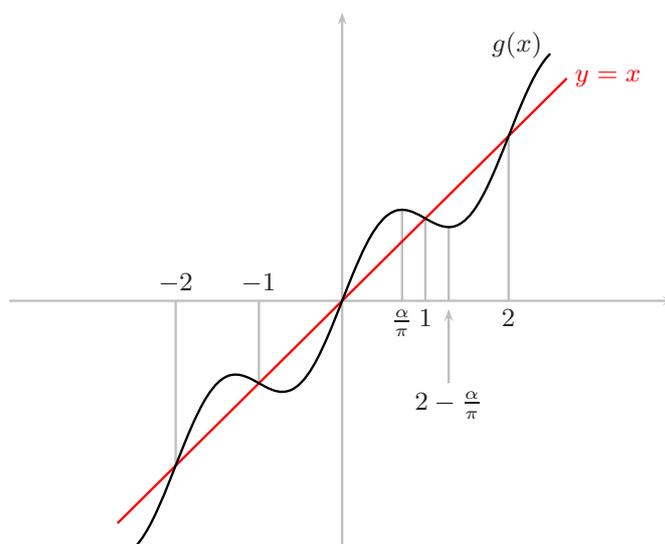


Fig. 5. Grafico di  $g(x)$ .

3) Il primo punto di massimo relativo che soddisfa alla  $x > 0$  possiede ascissa  $x_M = \frac{\alpha}{\pi}$  (fig. 3) e ivi la derivata prima si annulla ossia

$$g'(x_M) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x_M) + 1 = 0$$

o, in forma equivalente

$$\pi \cos(\pi x_M) + 2 = 0.$$

Il valore  $x_M$  soddisfa quindi all'equazione  $\pi \cos(\pi x) + 2 = 0$  e, per la stima **data** di  $\alpha$  e pure per lo studio fatto delle derivate di  $g$ , certamente risulta  $0 < x_M < 1$ . Per valutare  $x_M$  con una approssimazione migliore, scegliamo di applicare il metodo di bisezione alla funzione  $f(x) = \pi \cos(\pi x) + 2$  in quanto cerchiamo una sua soluzione in  $[0, 1]$ .

Notato che

$$f(0) = \pi + 2 > 0 \quad \wedge \quad f(1) = \pi \cos \pi + 2 = 2 - \pi < 0,$$

calcoliamo la  $f$  nel punto medio di questo intervallo: risulta

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \cos \frac{\pi}{2} + 2 = 2 > 0$$

per cui segue che

$$\frac{1}{2} < x_M < 1.$$

Procedendo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{4}\right) = \pi \cos \frac{3}{4}\pi + 2 \approx -0,22 \implies \frac{1}{2} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{5}{8}\right) \approx 0,79 \implies \frac{5}{8} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{11}{16}\right) \approx 0,25 \implies \frac{11}{16} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{11}{16} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{23}{32}\right) \approx 0,0069 \implies \frac{23}{32} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{23}{32} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{47}{64}\right) \approx -0,1098 \implies \frac{23}{32} < x_M < \frac{47}{64} \end{aligned}$$

Quest'ultima implica  $0,71875 < x_M < 0,7344$  e cioè  $x_M \approx 0,7$ . Procedendo ulteriormente si trova  $x_M \approx 0,719668$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 8.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Se il rapporto di similitudine tra lunghezze di segmenti è pari a 3, in generale  $s$ , allora le aree di figure simili stanno nel rapporto  $s^2$  e i volumi nel rapporto  $s^3$ . Risulta quindi

$$\frac{l'}{l} = s = 3 \quad \implies \quad \frac{A'}{A} = s^2 = 9 \quad \implies \quad \frac{V'}{V} = s^3 = 27.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 10.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 5.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 3.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Supposte date le lunghezze della base  $AB$  e dell'altezza  $AH$  (fig. 1) in quanto l'area risulta costante  $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \text{cost.}$ , si tratta di dimostrare che

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2p$$

è minimo quando  $\triangle ABC$  è isoscele ossia  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . Poiché la lunghezza di  $AB$ , come detto, è ritenuta assegnata, è sufficiente trovare il minimo della somma  $\overline{AC} + \overline{BC}$ .

Seguendo un approccio geometrico elementare, sia  $A'$  il punto simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $r$  parallela alla base  $AB$  e passante per  $C$ . Risulta

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A'C} + \overline{BC}.$$

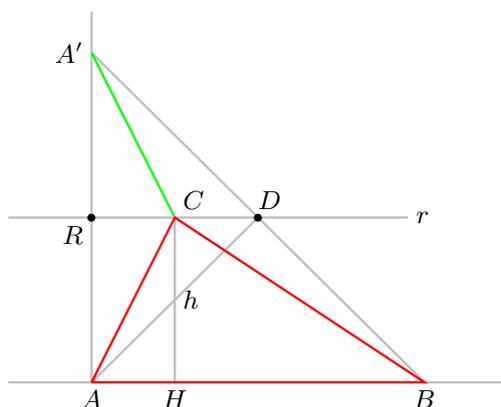


Fig. 1.

Evidentemente la somma  $\overline{A'C} + \overline{BC}$  è minima quando  $C$  appartiene al segmento  $A'B$  ossia quando  $C \equiv D$ . In tal caso, dal fatto che  $\overline{A'R} = \overline{RA}$  e che la retta  $r$  è parallela ad  $AB$ , discende (teorema di Talete) che pure  $\overline{A'D} = \overline{DB}$ , per cui  $D$  è il punto medio di  $A'B$ , ipotenusa del triangolo rettangolo  $A'AB$ . Sempre nell'ipotesi  $C \equiv D$ ,  $AC$  appare la mediana di  $A'B$  e, per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, la sua lunghezza risulta  $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{DB}$  ossia  $\triangle ABC$  è isoscele.

In modo alternativo, dimostriamo la tesi appena esposta tramite un approccio analitico. Introdotta un sistema cartesiano di origine  $O$  nel punto medio di  $AB$ , disponiamo quest'ultimo sull'asse  $x$  e consideriamo la sua lunghezza pari a  $\overline{AB} = 2a$  ( $a > 0$ ). Sia inoltre  $\overline{CH} = h$  e sia  $x$  l'ascissa comune di  $H$  e  $C$  (fig. 2).

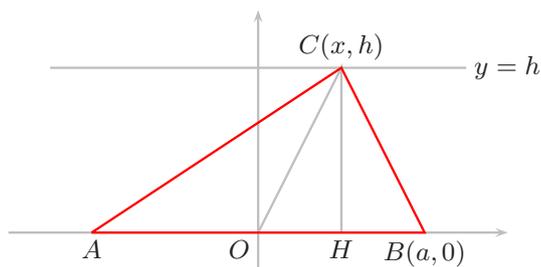


Fig. 2.

In base al teorema di Pitagora facilmente si trova

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(a+x)^2 + h^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(a-x)^2 + h^2}.$$

La funzione da minimizzare (il terzo lato, **come detto**, rimane costante) è quindi

$$\begin{cases} y = \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{(a+x)^2 + h^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h^2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(a+x)}{2\sqrt{(a+x)^2 + h^2}} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2 + h^2}} \\ &= \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + h^2}} + \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

Passando alla disequazione  $y' \geq 0$ , moltiplichiamo i suoi membri per il m. c. denominatore (che risulta positivo) e otteniamo

$$\begin{aligned} (a+x)\sqrt{(a-x)^2 + h^2} - (a-x)\sqrt{(a+x)^2 + h^2} &\geq 0 \\ (a+x)\sqrt{(a-x)^2 + h^2} &\geq (a-x)\sqrt{(a+x)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

In quest'ultima disequazione il primo membro è positivo mentre il secondo può pure essere negativo: distinguiamo quindi i due casi.

Se  $a-x < 0$  cioè quando  $x > a$ , certamente risulta  $y' > 0$ . Se invece  $a-x \geq 0$  possiamo elevare al quadrato entrambi i membri ottenendo

$$\begin{cases} x \leq a \\ (a+x)^2 [(a-x)^2 + h^2] \geq (a-x)^2 [(a+x)^2 + h^2] \end{cases}$$

che implica

$$(a^2 - x^2)^2 + h^2 a^2 + h^2 x^2 + 2h^2 ax \geq (a^2 - x^2)^2 + h^2 a^2 + h^2 x^2 - 2h^2 ax$$

da cui, ridotti i termini simili, si ottiene

$$4h^2 ax \geq 0 \quad \implies \quad x \geq 0.$$

Uniti i due risultati, la rappresentazione grafica del segno di  $y'$  (fig. 3) mostra che la funzione (perimetro) è decrescente per valori negativi di  $x$ , crescente per quelli positivi. In  $x = 0$  la somma  $\overline{AC} + \overline{BC}$  e il perimetro raggiungono il loro valore minimo.

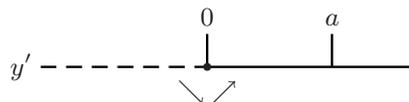


Fig. 3.

Ma in tal caso il punto  $C$  appartiene all'asse delle ordinate del sistema scelto per cui  $\triangle ABC$  risulta isoscele.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 1.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è, nella prima parte, del tutto simile al quesito 4 proposto nei corsi di ordinamento, al quale si rimanda.

Circa il calcolo di una stima della radice  $\alpha$  tramite un metodo iterativo scegliamo, per la sua immediatezza, quello di bisezione e lo applichiamo alla funzione  $f(x) = e^x + 3x$ . Quindi, notato che  $f(-1) = e^{-1} - 3 < 0$ , e  $f(0) = 1$ , la soluzione  $\alpha$  di  $f(\alpha) = 0$  dovrà essere interna all'intervallo  $[-1, 0]$ .

Procedendo con il metodo di bisezione:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1+0}{2}\right) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} - \frac{3}{2} \approx -0,89 \implies -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ f\left(\frac{-\frac{1}{2}+0}{2}\right) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0,028 \implies -\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{3}{8}\right) \approx -0,4377 \implies -\frac{3}{8} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{5}{16}\right) \approx -0,2059 \implies -\frac{5}{16} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{5}{16}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{9}{32}\right) \approx -0,0889 \implies -\frac{9}{32} < \alpha < -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Finora quindi abbiamo che  $-0,2813 < \alpha < -0,25$ : procedendo ulteriormente si può giungere a  $\alpha \approx -0,257628$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La trasformazione assegnata

$$s : \begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$$

rientra nella forma generale delle affinità del piano in sé rappresentate analiticamente dalle equazioni

$$t : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f. \end{cases}$$

Poiché inoltre  $a = e = \sqrt{3}$  e  $b = -d = 1$ , la trasformazione  $s$  rientra nelle classe di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay, \end{cases}$$

forma che descrive le similitudini dirette (o concordi) di rapporto

$$k = \sqrt{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Difatti, nel caso assegnato, risulta

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4 > 0$$

che conferma come la similitudine sia diretta. Il rapporto di similitudine è quindi

$$k = \sqrt{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = 2.$$

# ESAME 2005

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • Problema n. 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico, si consideri la regione  $R$ , finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola  $\lambda$  d'equazione:  $y = 6 - x^2$ .

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno all'asse  $y$ .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno alla retta  $y = 6$ .
3. Si determini il valore di  $k$  per cui la retta  $y = k$  dimezza l'area di  $R$ .
4. Per  $0 < t < \sqrt{6}$  sia  $A(t)$  l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a  $\lambda$  nel suo punto di ascissa  $t$ . Si determini  $A(1)$ .
5. Si determini il valore di  $t$  per il quale  $A(t)$  è minima.

Soluzione

## • Problema n. 2

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1, \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, nell'intervallo  $[0, +\infty[$ , un'unica radice reale.
3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$

del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .

5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

### Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$  e  $\sin 36^\circ$ .

Soluzione

2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Soluzione

3. Si dimostri che la curva  $y = x \sin x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\sin x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$ .

Soluzione

4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

Soluzione

5. Il numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di  $e^x$  è  $e^x$ ?

Soluzione

6. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Soluzione

7. Se  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , per quanti numeri reali  $k$  è  $f(k) = 2$ ? Si illustri il ragionamento seguito.

Soluzione

8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

Soluzione

9. Si calcoli senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di

$$\operatorname{sen}^2(35^\circ) + \operatorname{sen}^2(55^\circ)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

Soluzione

10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$  è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Soluzione

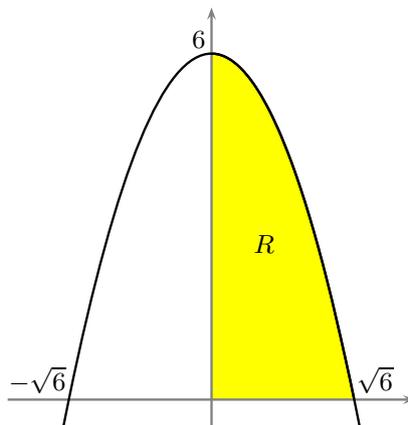
**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

La parabola  $\lambda : y = 6 - x^2$  possiede vertice in  $V(0, 6)$  ed interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa  $x = \pm\sqrt{6}$ . Assieme agli assi coordinati  $\lambda$  definisce la regione finita  $R$  rappresentata in colore, assieme a  $\lambda$ , in fig. 1.

1. Per determinare il volume del solido generato dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$  conviene applicare a  $\lambda$  la trasformazione di simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante,  $\sigma$ , così da riportarci alla situazione standard che considera di norma la rotazione attorno all'asse  $x$ . Pertanto, se  $\sigma$  è la trasformazione

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

$\sigma(\lambda)$  è data dall'equazione  $\sigma(\lambda) : x' = 6 - (y')^2$  dalla quale, esplicitando la



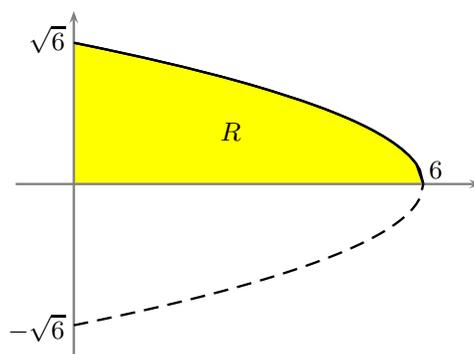
**Fig. 1.** La parabola  $\lambda$  e regione  $R$ .

variabile  $y'$  (che chiameremo per semplicità  $y$  come pure  $x'$ ,  $x$ ),

$$x = 6 - y^2, \quad \implies \quad y^2 = 6 - x$$

da cui

$$\sigma(\lambda) : \begin{cases} y = \sqrt{6 - x} \\ 0 \leq x \leq 6 \wedge y \geq 0. \end{cases}$$



**Fig. 2.** Regione  $R$  e rotazione attorno all'asse  $x$ .

La situazione geometrica, rappresentata dalla fig. 2, è in tal modo riportata a quella di un solido generato dalla rotazione di una regione piana sottostante ad una funzione  $y = f(x)$  attorno all'asse delle ascisse. Possiamo pertanto applicare l'espressione generale che fornisce il volume  $\mathcal{V}$  del solido di rotazione

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

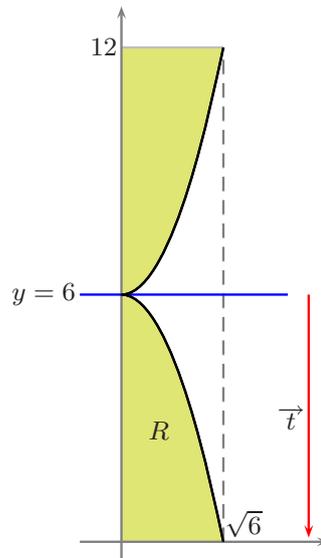
che, nel caso in esame, diviene

$$\mathcal{V}_1 = \pi \int_0^6 (\sqrt{6-x})^2 dx = \pi \int_0^6 (6-x) dx.$$

L'integrazione indefinita è immediata per cui

$$\mathcal{V}_1 = \pi \left[ 6x - \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \pi \left( 36 - \frac{36}{2} \right) = 18\pi.$$

2. Il volume  $\mathcal{V}_2$  del solido che  $R$  genera con la sua rotazione attorno alla retta  $r : y = 6$  (figura 3) rimane evidentemente lo stesso se applichiamo, alla parabola  $\lambda$  e alla retta  $r$ , la traslazione che riporta quest'ultima a coincidere con l'asse  $x$ .



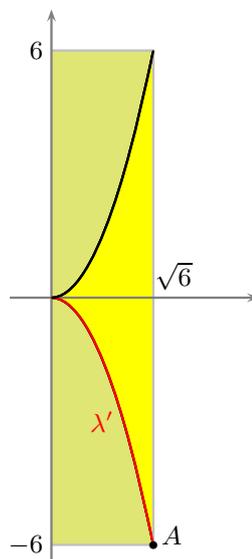
**Fig. 3.** Rotazione di  $R$  attorno alla retta  $y = 6$ .

Sia  $\tau$  questa traslazione e il vettore  $\vec{t}$  che la rappresenta (fig. 3) possiede evidentemente componenti  $\vec{t} = (0, -6)$ . Risulta quindi

$$\tau : \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 6 \end{cases} \quad \text{con inversa} \quad \tau^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = y' + 6 \end{cases}$$

cosicché l'immagine  $\lambda'$  di  $\lambda$  è

$$\lambda' = \tau(\lambda) : y' + 6 = 6 - (x')^2 \quad \implies \quad y' = -(x')^2,$$



**Fig. 4.** Curve traslate e rotazione attorno alla retta  $y = 0$ .

equazione che riscriviamo ancora, per comodità, come  $\lambda' : y = -x^2$  (in rosso in fig. 4).

Detto  $A$  il punto  $A(\sqrt{6}, -6) \in \lambda'$ , il volume  $\mathcal{V}_2$  richiesto si ottiene sottraendo al cilindro con raggio di base  $r_b = -y_A = 6$  ed altezza  $h = x_A = \sqrt{6}$ , il volume che  $\lambda'$  genera con la sua rotazione attorno all'asse  $x$  e compreso tra le rette  $x = 0$  e  $x = \sqrt{6}$  (in fig. 4 compare in giallo la sua sezione).

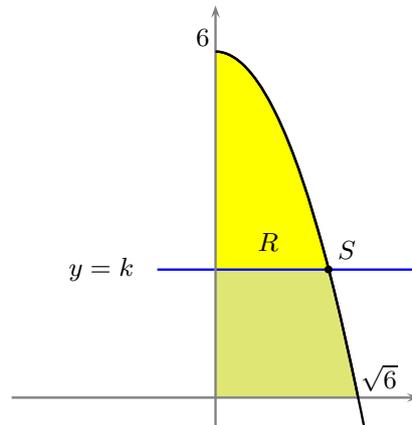
Pertanto il volume richiesto è

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \pi r_b^2 \cdot h - \pi \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2) dx = 36\pi\sqrt{6} - \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx \\ &= 36\pi\sqrt{6} - \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36\pi\sqrt{6}}{5} = 36\pi\sqrt{6} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{144\pi\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

3. Anche in questo caso, per determinare il valore di  $k$  in corrispondenza del quale la retta orizzontale  $y = k$  dimezza la regione  $R$  (fig. 5), applichiamo la medesima trasformazione di simmetria del primo punto.

Poiché l'area di  $R$ ,  $\mathcal{A}(R)$ , rimane la medesima in questa trasformazione, determiniamo innanzitutto il suo valore tramite l'integrale definito

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx = \left[ 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}}$$

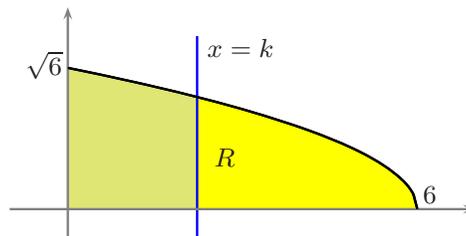


**Fig. 5.** Suddivisione di  $R$  da parte della retta  $y = k$ .

dal quale si ottiene

$$\mathcal{A}(R) = 6\sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}.$$

L'applicazione della simmetria assiale rispetto alla bisettrice riporta alla configurazione geometrica descritta nella fig. 6 dove la funzione che definisce  $R$  è, come visto, data dall'equazione  $y = \sqrt{6-x}$  con  $x \in [0, 6]$ .



**Fig. 6.** Regioni di  $R$ .

Notato che la retta  $y = k$  diviene ora  $x = k$ , la condizione richiesta si traduce in

$$\int_0^k \sqrt{6-x} \, dx = \frac{\mathcal{A}(R)}{2}$$

cioè

$$\int_0^k \sqrt{6-x} \, dx = 2\sqrt{6}. \quad (1)$$

Risolto l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{6-x} \, dx$$

con la sostituzione  $6 - x = t$ , da cui  $x = 6 - t$  e  $dx = -dt$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{6-x} dx &= \int \sqrt{t} (-dt) = -\int t^{1/2} dt \\ &= -\frac{t^{3/2}}{(3/2)} + c = -\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} + c,\end{aligned}$$

la condizione (1) diviene

$$\left[ -\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} \right]_0^k = 2\sqrt{6}$$

che fornisce

$$-\frac{2}{3} \sqrt{(6-k)^3} + \frac{2}{3} \sqrt{6^3} = 2\sqrt{6} \implies \frac{2}{3} \sqrt{(6-k)^3} = 2\sqrt{6}$$

quindi

$$\sqrt{(6-k)^3} = 3\sqrt{6} \implies (6-k)^3 = 6 \cdot 3^2 \implies (6-k)^3 = 2 \cdot 3^3$$

da cui, in definitiva,  $6 - k = 3\sqrt[3]{2}$  ossia  $k = 6 - 3\sqrt[3]{2} \approx 2,22$ .

Si può giungere allo stesso risultato in modo più sintetico se ricorriamo alla formula di Archimede per l'area di un segmento parabolico

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} |a| \cdot |x_2 - x_1|^3$$

dove  $a$  rappresenta il coefficiente del termine di secondo grado nell'equazione della parabola e  $x_1, x_2$ , le ascisse dei punti di intersezione tra la retta "base" del segmento e la parabola.

Detto quindi  $S$  il punto di intersezione della retta  $y = k$  con l'arco di parabola  $\lambda$  nel I quadrante (fig. 5), risulta

$$\begin{cases} y = k \\ y = 6 - x^2 \end{cases} \implies k = 6 - x^2 \implies x = \pm \sqrt{6 - k}$$

con  $x_S = \sqrt{6 - k}$ : il secondo punto di intersezione tra  $r$  e  $\lambda$  è invece il simmetrico ad  $S$  e possiede ascissa  $x_1 = -\sqrt{6 - k}$ . Poiché l'area della regione richiesta (in giallo in fig. 5), è metà dell'area del segmento parabolico delimitato da  $\lambda$  e  $r$  e si ha  $a = -1$  e  $x_2 = x_S = \sqrt{6 - k} = -x_1$  avremo

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} |-1| \cdot \left| \sqrt{6 - k} - (-\sqrt{6 - k}) \right|^3 \right) = \frac{\mathcal{A}(R)}{2}$$

da cui

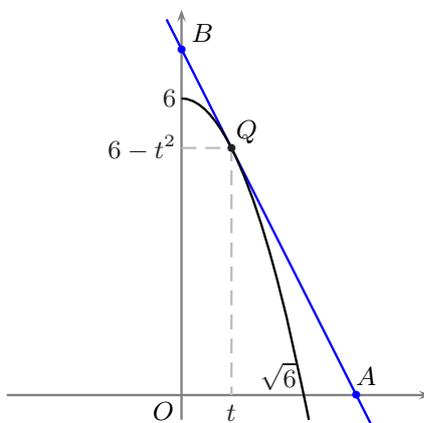
$$\frac{1}{12} |2\sqrt{6-k}|^3 = 2\sqrt{6} \quad \text{ossia} \quad \frac{2}{3} (\sqrt{6-k})^3 = 2\sqrt{6}.$$

Infine, con passaggi analoghi a quelli già **svolti** si riottiene il medesimo risultato.

4. La retta tangente nel punto  $Q(t, 6-t^2) \in \lambda$  con  $0 < t < \sqrt{6}$  (fig. 7), si ottiene dopo aver calcolato il coefficiente angolare  $m_t$  fornito dalla derivata prima  $y' = -2x$  di  $\lambda$ . Risulta quindi  $y'(t) = m_t = -2t$  e l'equazione rappresentativa della retta tangente è

$$y - y_Q = y'(t)(x - x_Q) \quad y - (6 - t^2) = -2t(x - t)$$

dalla quale si ha  $y = -2tx + t^2 + 6$ .



**Fig. 7.** Retta tangente nel punto di ascissa  $t$  a  $\lambda$ .

I punti  $A$  e  $B$  di intersezione di tale retta con gli assi  $x$  e  $y$  sono ( $t \neq 0$ )

$$y = 0, \quad 0 = -2tx_A + t^2 + 6 \quad \implies \quad x_A = \frac{t^2 + 6}{2t}$$

e quindi

$$A\left(\frac{t^2 + 6}{2t}, 0\right), \quad B(0, t^2 + 6).$$

L'area di  $\triangle OAB$  è

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 6}{2t}\right) \cdot (t^2 + 6)$$

ossia

$$\begin{cases} \mathcal{A}(t) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t} \\ 0 < t < \sqrt{6}. \end{cases} \quad (2)$$

È ora immediato calcolare

$$\mathcal{A}(1) = \frac{(1^2 + 6)^2}{4 \cdot 1} = \frac{49}{4}.$$

5. Per determinare il valore di  $t$  per il quale  $\mathcal{A}(t)$  risulta minima possiamo studiare il segno della sua derivata prima. Questa risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(t) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{2(t^2 + 6) \cdot 2t \cdot t - (t^2 + 6)^2}{t^2} \right] \\ &= \frac{t^2 + 6}{4t^2} (4t^2 - t^2 - 6) \\ &= \frac{t^2 + 6}{4t^2} (3t^2 - 6) \end{aligned}$$

e la condizione  $\mathcal{A}'(t) \geq 0$  implica per l'unico termine non positivo della  $\mathcal{A}'$

$$3t^2 - 6 \geq 0, \quad t^2 \geq 2, \quad t \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad t \geq \sqrt{2}.$$

Considerando che  $t \in ]0, \sqrt{6}[$ , la rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{A}'$  mostrata in fig. 8 conferma che il valore minimo di  $\mathcal{A}(t)$  viene raggiunto in corrispondenza del valore  $t_{min} = \sqrt{2}$ .

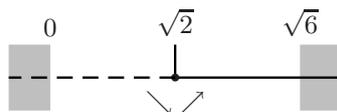


Fig. 8.

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

La funzione  $f$  è rappresentata da

$$f : \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e possiede per dominio l'insieme  $D = [0, +\infty[$  (scriviamo  $\ln x$  in luogo di  $\log x$  per intendere il logaritmo in base naturale). La richiesta se  $f$  sia continua e derivabile in  $x = 0$  va quindi intesa come continuità e derivabilità a destra in  $x = 0$ . Dato che  $f(0) = 1$  lo studio della continuità implica la risoluzione del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right]$$

e, in particolare, di  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$  dato che i limiti dei rimanenti addendi sono immediati. Quest'ultimo rappresenta un caso di indeterminazione del tipo  $0 \cdot \infty$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Riscritto però nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x^2)}$$

possiamo pensare di applicare il teorema di De L'Hôpital *se* esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln x)}{D(1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{(-2/x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right).$$

Poiché risulta  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0$  è possibile applicare il teorema suddetto cosicché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

e quindi per il teorema della somma di limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

In definitiva, poiché  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  la funzione  $f$  è continua a destra in  $x = 0$ .

Per quanto riguarda la derivabilità, costruiamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{3}{2}h^2 - h^2 \ln h + 1 - (1) \right] \\ &= \frac{3}{2}h - h \ln h \end{aligned}$$

e studiamone il limite per  $h \rightarrow 0^+$ . L'analisi del limite  $\lim_{h \rightarrow 0^+} (h \ln h)$  conduce ancora ad un caso di indeterminazione che si può affrontare con la stessa tecnica applicata appena sopra. Difatti, poiché il seguente limite esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln h)}{D(1/h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1/h)}{(-1/h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -h = 0,$$

è ancora possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e affermare che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln h = 0$$

e concludere che

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2}h - h \ln h \right) = 0 - 0 = 0.$$

La funzione  $f$  possiede quindi anche la derivata destra in  $x = 0$  e questa risulta  $f'(0^+) = 0$ .

Va infine notato che, affrontando per primo il problema della derivabilità e, dimostrata l'esistenza di  $f'(0^+)$ , rimane pure dimostrata la continuità di  $f$  in  $x = 0$  in quanto una funzione derivabile in un punto è, nel medesimo punto, pure continua.

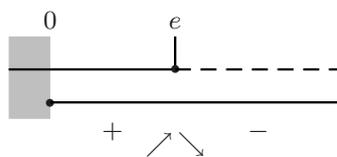
2. Per dimostrare l'esistenza di un'unica radice reale di  $f(x) = 0$  nel dominio  $[0, +\infty[$  calcoliamo la derivata di  $f$  anche per  $x > 0$  ossia

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x - \left( 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= 3x - 2x \ln x - x = 2x - 2x \ln x \\ &= 2x(1 - \ln x). \end{aligned}$$

Nel dominio è quindi

$$f' : \begin{cases} f'(0^+) = 0 \\ f'(x) = 2x(1 - \ln x), \quad \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Il segno di  $f'$  per  $x > 0$  dipende dal secondo fattore cioè da  $1 - \ln x \geq 0$  che implica  $1 \geq \ln x$ ,  $x \leq e$  per cui possiamo affermare che per  $0 < x \leq e$ ,  $f$  è crescente, mentre decresce strettamente se  $x > e$  (fig. 1).



**Fig. 1.**

Osserviamo che  $f(0) = 1$  e, a maggior ragione,  $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 > 0$ . Inoltre risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 \right] = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x = -\infty :$$

di conseguenza sarà possibile determinare un valore  $b$  in corrispondenza del quale  $f(b) < 0$ . Difatti procedendo per tentativi, già con  $b = 5$  risulta  $f(5) =$

$\frac{25}{2}(3 - 2\ln 5) + 1 \approx -1,736 < 0$  cosicché nell'intervallo chiuso  $[e, 5]$  è possibile applicare il teorema degli zeri e quindi dedurre l'esistenza di almeno uno zero per  $f(x) = 0$ . D'altra parte, per la monotonia strettamente decrescente di  $f$  in tale intervallo deve sussistere un solo punto di intersezione di  $f$  con l'asse  $x$  e pertanto l'equazione  $f(x) = 0$  possiede un'unica soluzione,  $x_1$ . Quest'ultima dovrà certamente soddisfare alle disuguaglianze  $e < x_1 < 5$ .\*

3. Per poter disegnare la curva  $C$  rappresentativa di  $f$  manca solo lo studio della  $f''(x)$  che risulta

$$f''(x) = 2 \left[ 1 - \ln x + x \left( -\frac{1}{x} \right) \right] = -2 \ln x \quad x > 0.$$

Il suo segno discende immediato in quanto  $f''(x) \geq 0$  se  $\ln x \leq 0$  cioè  $x \leq 1$ . La funzione  $f$  è quindi convessa per  $0 < x < 1$ , concava per  $x > 1$  e in  $x = 1$  presenta un punto di flesso (fig. 2).

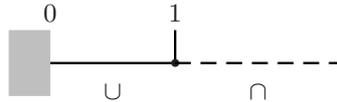


Fig. 2.

Calcolata l'ordinata del punto di flesso  $f(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ , il grafico di  $C$  è rappresentato dalla (fig. 3). La retta  $r$ , tangente nel punto di ascissa  $x = 1$  a  $C$ , è quindi anche la tangente inflessionale ed è data da

$$r : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \implies \quad y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$$

ossia  $r : y = 2x + \frac{1}{2}$ .

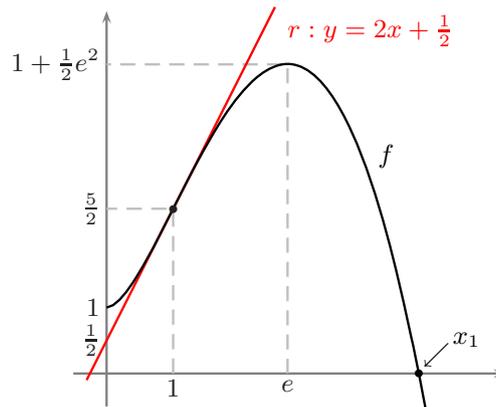
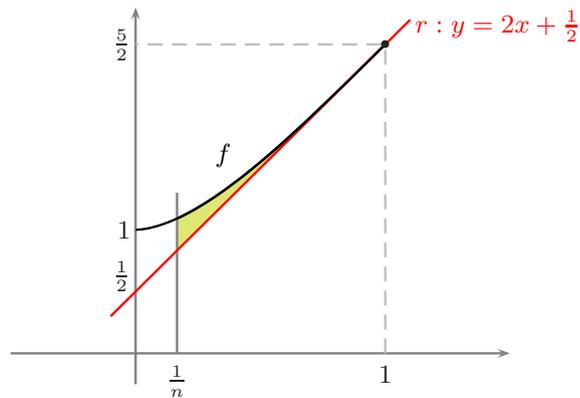


Fig. 3. Grafici di  $f$  e della tangente nel suo punto di flesso.

\* Per una stima approssimata di tale valore si veda la **seconda** domanda del problema n. 2 dell'Esame 2005 PNI.

4. Con  $n \in \mathbb{N}_0$  ( $n > 0$ ), il dominio piano del quale si chiede l'area  $A_n$  è evidenziato in figura 4 in quanto l'estremo  $\frac{1}{n}$  risulta minore di 1.



**Fig. 4.** Dominio piano  $A_n$  compreso tra  $f$  e  $r$  (sistema non isometrico).

L'area di questa regione è data dall'integrale definito della differenza tra le equazioni rappresentative di  $f$  e  $r$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \left( \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right) - \left( 2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx$$

ossia da

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} \right) dx.$$

Poiché l'unico integrale non elementare è collegato all'addendo  $x^2 \ln x$ , risolviamo l'integrale indefinito

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

utilizzando il metodo per parti e identificando il fattore finito con  $\ln x$  e quello differenziale con  $x^2 dx$ . Ne segue

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \left( \frac{x^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \end{aligned}$$

per cui, ottenute le primitive dei rimanenti addendi

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad \int dx = x + c,$$

$A_n$  si calcola con la differenza

$$A_n = \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + \frac{1}{2}x \right]_{1/n}^1$$

Si ha

$$\begin{aligned} A_n &= \left[ \frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} \ln x \right]_{1/n}^1 \\ &= \frac{11}{18} - 1 + \frac{1}{2} - \left( \frac{11}{18n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln n}{3n^3}. \end{aligned}$$

5. Per calcolare il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  va osservato innanzitutto che, per tre addendi che formano  $A_n$ , il limite appare il medesimo e risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{18n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

in quanto se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \infty$  si dimostra anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/f(n) = 0$ . Per risolvere invece

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

ci riportiamo al limite, analogo, della funzione di variabile reale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

Poiché è manifestamente indeterminato ( $\infty/\infty$ ), studiamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore onde, eventualmente, applicare il teorema di De L'Hôpital. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

cosicché l'applicazione del teorema suddetto, comporta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0.$$

È quindi anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3} = 0$$

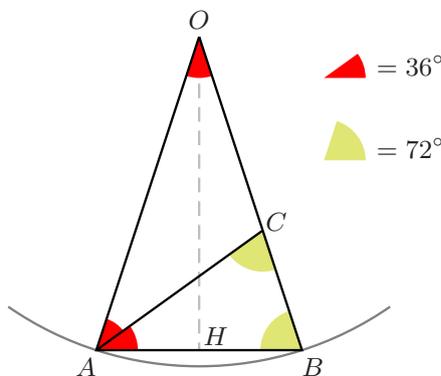
e, in conclusione,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln n}{3n^3} \right) \\ &= \frac{1}{9} - 0 + 0 - 0 - 0 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

L'interpretazione di questo risultato è immediata se si considera che per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  per cui la retta  $x = \frac{1}{n}$  di fig. 4 si avvicina all'asse delle  $y$  cosicché il limite trovato esprime l'area compresa tra la curva  $C$  di  $f$ , la sua tangente inflessionale e l'asse  $y$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Consideriamo l'angolo al centro che insiste su un arco pari ad  $\frac{1}{10}$  della lunghezza della circonferenza ossia un angolo di ampiezza  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .



**Fig. 1.**

La corda sottesa da tale arco è evidentemente il lato del decagono regolare e la base del triangolo isoscele avente per lati obliqui due raggi della medesima circonferenza. Nella figura 1 è rappresentato questo triangolo: poniamo  $x = \overline{AB}$ ,  $r = \overline{OA} = \overline{OB}$  mentre, dal fatto che  $\angle AOB = 36^\circ$  e che  $\triangle OAB$  risulta isoscele, discende che  $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$ . Tracciata la bisettrice di  $\angle OAB$ , questa incontra in  $C$  il lato  $OB$ . Poiché  $\angle OAC = 36^\circ$ ,  $\triangle OAC$  è isoscele sulla base  $OA$ . Ne segue che  $\overline{AC} = \overline{OC}$ .

Il triangolo  $ABC$  possiede l'angolo in  $B$  che misura  $72^\circ$  e un altro in  $A$  di  $36^\circ$  cosicché l'ampiezza del terzo dev'essere  $\angle ACB = 72^\circ$ . Quindi anche  $\triangle ABC$  è isoscele con  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{OC}$ . Inoltre quest'ultimo triangolo risulta simile a

quello di partenza in quanto tutti gli angoli corrispondenti sono congruenti. Da  $\triangle ABC \cong \triangle OAB$  discende

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

oppure

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OC}}{\overline{OC}}$$

in quanto  $\overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OC}$ .  $OC$  è pertanto sezione aurea di  $OB$  essendo medio proporzionale tra il raggio  $OB$  e la parte rimanente.

Con le condizioni poste, l'ultima proporzione si riscrive

$$\frac{x}{r} = \frac{r-x}{x}$$

dalla quale discende l'equazione  $x^2 + rx - r^2 = 0$  che, risolta, fornisce la radice positiva

$$x = r \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Essendo  $x$  il lato del decagono, pure questo risultato riafferma che esso è sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto (il numero  $(-1 + \sqrt{5})/2$  è, appunto, indicato come la *sezione aurea* dell'unità).

Per determinare il valore di  $\sin 18^\circ$ , tracciamo l'altezza  $OH$  e osserviamo che  $\overline{AB} = x = 2\overline{HB} = 2\overline{OB} \sin 18^\circ$ . Dal rapporto ottenuto precedentemente è allora

$$\frac{2r \sin 18^\circ}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \implies \quad \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0,3090. \quad (1)$$

Notato che  $\sin 18^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \cos 72^\circ$  o, in modo equivalente,

$$\sin 18^\circ = \frac{\overline{HB}}{\overline{OB}} = \cos 72^\circ,$$

utilizzando la formula di bisezione per il seno

$$|\sin \alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

il valore di  $\sin 36^\circ$  è

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos(2 \cdot 36^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 72^\circ}{2}}$$

per cui sostituendo al  $\cos 72^\circ$  il  $\sin 18^\circ$  dato da (1), abbiamo la formula seguente\*

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \approx 0,5878.\end{aligned}$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $h$  l'altezza del cilindro che, essendo retto, cade nel centro del cerchio di base e  $x$  il suo raggio di base (fig. 1). È evidentemente  $h > 0$ ,  $x > 0$ . Poiché il volume è fissato al valore  $\mathcal{V} = 0,4$  litri =  $0,4 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 400 \text{ cm}^3$ , dev'essere

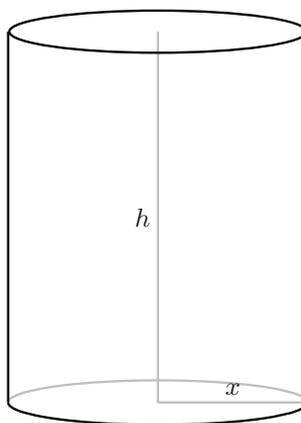
$$\mathcal{V} = \pi x^2 \cdot h \tag{1}$$

mentre l'area totale in termini degli stessi parametri risulta espressa dalla

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{base}} + \mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi x^2 + \pi x^2 + (2\pi x) \cdot h$$

ossia

$$\mathcal{A} = 2\pi(x^2 + x \cdot h).$$



**Fig. 1.** Cilindro circolare retto.

---

\* Per altri approfondimenti si veda la pagina web interattiva  
<http://www.lorenzoroi.net/geometria/Poligoni.html>

Poiché questa funzione dipende da due variabili,  $x$  e  $h$ , dovremo ridurla ad una sola variabile ricavando  $h$  dalla (1). Difatti, esplicitata la variabile  $h = \mathcal{V}/(\pi x^2)$  la sostituiamo nell'espressione dell'area totale

$$\mathcal{A}(x) = 2\pi \left( x^2 + x \cdot \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \right) = 2\pi \left( x^2 + \frac{\mathcal{V}}{\pi x} \right) \quad x > 0.$$

La ricerca della minima quantità di materiale per realizzare la lattina si riduce ora alla determinazione del minimo di tale area (come detto si trascura lo spessore della latta). Passando quindi allo studio della sua derivata prima  $\mathcal{A}'(x)$ , si ha

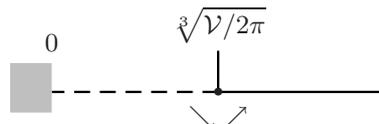
$$\mathcal{A}'(x) = 2\pi \left[ 2x + \frac{\mathcal{V}}{\pi} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right] = 2\pi \left( 2x - \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \right),$$

e il segno di tale derivata è determinato solo dal termine entro parentesi per cui

$$2x - \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \geq 0 \quad \cdot \pi x^2 > 0 \quad \implies \quad 2\pi x^3 - \mathcal{V} \geq 0 \quad \implies \quad x^3 \geq \frac{\mathcal{V}}{2\pi}.$$

L'estrazione della radice cubica fornisce

$$x \geq \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}}.$$



**Fig. 2.**

La rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{A}'(x)$  è data in fig. 2 e, considerate le limitazioni per  $x$ , mette in evidenza la presenza di un minimo assoluto di  $\mathcal{A}$  in corrispondenza del valore per il raggio

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{400}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3,9929 \text{ cm.}$$

In tal caso l'altezza è

$$h = \frac{\mathcal{V}}{\pi \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}^2}{4\pi^2}}} = \frac{\mathcal{V}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\mathcal{V}^2}} = \sqrt[3]{\frac{4\mathcal{V}}{\pi}} \approx 7,9859 \text{ cm}$$

pari quindi al diametro di base del cilindro

$$d = 2x_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4\mathcal{V}}{\pi}}.$$

In conclusione, il minimo dell'area totale (o del materiale da utilizzare), dato un certo volume, si raggiunge quando il cilindro retto risulta equilatero ossia possiede diametro di base pari all'altezza.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Affinché due curve descritte da equazioni del tipo  $y_1 = f(x)$  e  $y_2 = g(x)$  (e quindi rappresentative di funzioni reali di variabile reale) siano tangenti in un punto di ascissa  $x_0$ , devono essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Queste mettono in evidenza che il punto di ascissa  $x_0$  dev'essere comune ad entrambe le curve e, in questo punto, le curve devono possedere la medesima derivata e quindi la medesima retta tangente (si veda il quesito 2 assegnato nei corsi sperimentali per la definizione di retta tangente).

Nel caso proposto, la prima condizione è soddisfatta dai valori

$$\begin{cases} y_1 = x \operatorname{sen} x \\ y_2 = x \end{cases} \implies x = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen} x = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ , suggeriti implicitamente anche dal testo. Poiché poi le rispettive derivate prime sono

$$\begin{cases} y_1'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \\ y_2'(x) = 1 \end{cases}$$

il loro calcolo nei punti  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  mostra

$$\begin{aligned} y_1' \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \\ &= 1 + 0 = 1 = y_2' \end{aligned}$$

per cui è soddisfatta pure la seconda condizione.

Procedendo nello stesso modo anche con la retta  $y = -x$  abbiamo

$$\begin{cases} y_1 = x \operatorname{sen} x \\ y_2 = -x \end{cases} \implies -x = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen} x = -1 \implies x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e quindi

$$\begin{cases} y_1'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \\ y_2'(x) = -1 \end{cases} \implies y_1' \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = -1 + 0 = -1 = y_2'$$

si dimostra pure la seconda parte.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Siano  $a$  e  $b$  le lunghezze dei lati di un rettangolo qualsiasi ( $a > 0 \wedge b > 0$ ). La condizione che lega queste variabili è la costanza del perimetro  $2p$  e questa si traduce nell'espressione

$$2a + 2b = 2p \quad \text{equivalente alla} \quad a + b = p.$$

La funzione che fornisce l'area è invece  $\mathcal{A} = a \cdot b$  per cui, ottenuta  $b$  dalla precedente,  $b = p - a$  e posta la condizione  $b > 0$  ossia  $p - a > 0$  cioè  $a < p$ , riduciamo la funzione area alla sola variabile  $a$  eliminando  $b$ : risulta

$$\begin{cases} \mathcal{A}(a) = a \cdot (p - a) = -a^2 + ap \\ 0 < a < p. \end{cases}$$

Passando alla derivata prima (o, in alternativa, notando che la funzione  $\mathcal{A}(a)$  è una parabola),  $\mathcal{A}'(a) = -2a + p$ , per cui sarà  $\mathcal{A}' \geq 0$  se  $-2a + p \geq 0$ ,  $a \leq \frac{p}{2}$ . La fig. 1 rappresenta quindi il segno di  $\mathcal{A}'$  e mette in evidenza come  $\mathcal{A}$  possieda un massimo assoluto se  $a = \frac{p}{2}$ .

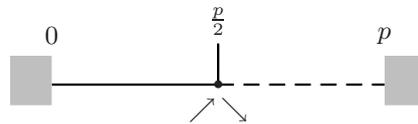


Fig. 1.

D'altra parte se  $a = \frac{p}{2}$  è pure  $b = p - a = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$  per cui il rettangolo si riduce ad un quadrato avendo lati uguali.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione del numero  $e$  di Nepero è data dal limite della successione

$$e = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

oppure, in luogo della successione, si può considerare pure il limite della funzione di variabile reale

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Per dimostrare che  $D(e^x) = e^x$  va risolto il limite del rapporto incrementale per la funzione esponenziale in un punto qualsiasi  $x$  del suo dominio  $\mathbb{R}$  e al tendere allo zero dell'incremento  $h$ . Questo limite assume la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

e per le proprietà dell'esponenziale si riscrive come

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^x \left( \frac{e^h - 1}{h} \right).$$

Posto

$$e^h - 1 = \frac{1}{t} \tag{1}$$

notiamo che se  $h \rightarrow 0$  dev'essere  $t \rightarrow \infty$  ossia, più formalmente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h - 1} = \infty.$$

La sostituzione (1) fornisce inoltre

$$e^h = 1 + \frac{1}{t} \implies h = \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} e^x \left( \frac{e^h - 1}{h} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^x \left[ \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^x \cdot \frac{1}{t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)} \end{aligned}$$

per cui, portando ad esponente dell'argomento del logaritmo il fattore  $t$  si giunge alla forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t}.$$

La definizione **esposta** per il numero  $e$  permette di risolvere il limite della funzione al denominatore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = \lim_{z \rightarrow e} \ln z = \ln e = 1$$

per cui il limite del rapporto incrementale esiste finito  $\forall x \in \mathbb{R}$  e risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} = \frac{e^x}{\ln e} = \frac{e^x}{1} = e^x$$

come richiedeva il quesito.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione di  $n$  fattoriale (simbolo  $n!$ ), è rappresentata dal secondo membro della scrittura

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

e consiste nel prodotto di  $n$  fattori pari ai numeri interi

$$1, 2, 3, \dots, (n-1), n.$$

Si pone inoltre  $0! = 1$ . Il suo significato combinatorio, descritto sinteticamente dalla  $P_n = n!$ , consiste nel fornire il numero  $P_n$  delle permutazioni semplici di  $n$  oggetti cioè il numero di quei gruppi contenenti  $n$  elementi tali da differire uno dall'altro solo per l'ordine in cui appaiono questi  $n$  elementi.

Il legame con i coefficienti binomiali  $C_{n,k}$  è dato dalla relazione

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove  $C_{n,k}$  rappresenta invece il numero delle combinazioni semplici di  $n$  oggetti a gruppi di  $k$  ossia di quei gruppi contenenti  $k$  elementi presi tra gli  $n$  possibili e che differiscono uno dall'altro per almeno un elemento.

I coefficienti binomiali e il numero delle permutazioni sono tra loro collegati in quanto, osservato che ogni combinazione semplice di  $k$  oggetti dà origine a  $P_k = k!$  permutazioni, dalla relazione sopra si ottiene pure

$$C_{n,k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k}$$

essendo  $D_{n,k}$  il numero complessivo dei gruppi di  $k$  elementi (presi tra  $n$  possibili) tali da differire o per l'ordine o per qualche elemento: questi ultimi rappresentano le disposizioni semplici di  $n$  oggetti a gruppi di  $k$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , il quesito chiede di determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 2$  illustrando il ragionamento seguito. Poiché  $f(x) = 2$  implica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2 \quad \implies \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$$

e posto  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ , la ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 2$  è equivalente alla ricerca del numero delle intersezioni del grafico della funzione  $g(x)$  con l'asse delle  $x$ . Studiamo quindi per la  $g(x)$  alcune sue proprietà.

Ricordata la continuità di  $g(x)$  in  $\mathbb{R}$  in quanto espressa da un polinomio, i suoi limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left( 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

essendo nulli i limiti di tutti gli addendi dipendenti dalla variabile  $x$  entro parentesi rotonde.

Il segno della derivata prima  $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2)$  dipende dal fattore  $x \geq 0$  e da  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ . L'equazione associata a quest'ultima disequazione possiede le soluzioni  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$  per cui la disequazione è soddisfatta per  $x \leq 1 \vee x \geq 2$ . Il segno complessivo di  $g'$  è rappresentato dalla fig. 1 e mostra come la  $g$  possieda due minimi in corrispondenza di  $x = 0$  e  $x = 2$ .

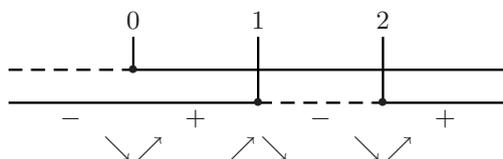


Fig. 1.

Poiché le ordinate di questi punti di minimo risultano

$$g(0) = 1, \quad g(2) = 16 - 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 = 1,$$

e quindi sono uguali e positive, la funzione  $g(x)$  ha come valore minimo assoluto 1 e di conseguenza il suo codominio è l'insieme  $[1, +\infty[$ . Non potrà quindi assumere alcun valore nullo o attraversare l'asse delle ascisse: l'equazione  $g(x) = 0$  ossia la  $f(x) = 2$  non può quindi avere soluzioni. In figura 2 riportiamo il grafico della funzione  $g(x)$  e le informazioni tratte dal suo studio.

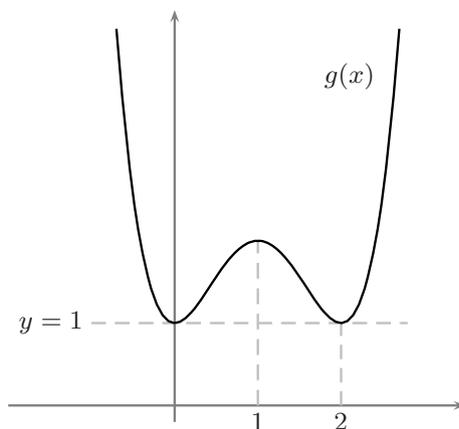


Fig. 2. Grafico della funzione  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ .

In alternativa a tale studio analitico e a partire dalla equazione

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2$$

osserviamo che, addizionando ad entrambi i membri  $-3$ , questa si può riscrivere come

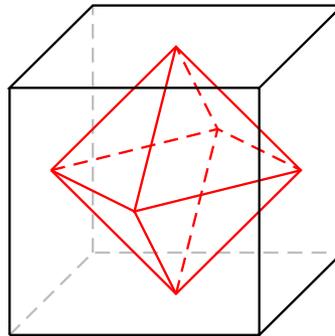
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = -1 \quad x^2(x^2 - 4x + 4) = -1 \quad x^2(x - 2)^2 = -1$$

e, manifestamente, non può esistere alcun valore  $x \in \mathbb{R}$  tale che il primo membro, prodotto di quadrati, sia uguale ad un valore negativo.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

L'ottaedro (fig. 1) è un poliedro con otto facce, sei vertici e dodici spigoli. Un poliedro si dice regolare quando tutte le sue facce sono dei poligoni regolari congruenti così come i suoi angoloidi. Questi ultimi sono definiti come la parte di spazio delimitata da tre o più semirette non complanari uscenti da uno stesso vertice e delimitata dagli angoli (le facce dell'angoloide) che queste formano a due a due.

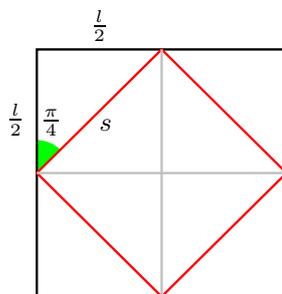
Nel caso dell'ottaedro la condizione che sia regolare si riduce alla congruenza tra tutti i suoi spigoli cosicché le sue facce saranno dei triangoli equilateri. Tale congruenza si traduce nell'uguaglianza delle distanze tra i centri delle sei facce del cubo.



**Fig. 1.** Cubo e ottaedro regolare.

Data comunque la simmetria del cubo, tale uguaglianza è soddisfatta e l'ottaedro che in tal modo si viene a formare è regolare.

Se  $l$  è la lunghezza dello spigolo del cubo, la lunghezza dello spigolo  $s$  dell'ottaedro è  $s = \frac{l}{\sqrt{2}}$  e si ottiene facilmente se consideriamo una sezione piana parallela a due facce del cubo passante per il suo centro (fig. 2): si ha  $\frac{l}{2} = s \cos \frac{\pi}{4}$ .



**Fig. 2.** Sezione piana centrale del cubo.

Poiché l'ottaedro è l'unione di due piramidi congruenti aventi ciascuna come superficie di base un quadrato di lato  $s$ , con area  $\mathcal{A} = s \cdot s = s^2 = \frac{l^2}{2}$ , ed altezza  $h = \frac{l}{2}$ , il volume dell'ottaedro risulta

$$\mathcal{V}(\text{ottaedro}) = 2 \left[ \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A} \cdot h \right] = 2 \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{l^3}{6}$$

cosicché il rapporto richiesto tra i volumi dei due solidi è

$$\frac{\mathcal{V}(\text{ottaedro})}{\mathcal{V}(\text{cubo})} = \frac{(l^3/6)}{l^3} = \frac{1}{6}.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Dato che

$$\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$$

in quanto vale l'identità  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  tra angoli complementari, l'espressione proposta dal quesito si riscrive

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ.$$

Poiché l'identità goniometrica fondamentale  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  vale per  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , segue che

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1.$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il dominio della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

è evidentemente l'insieme  $D = \mathbb{R} - \{1\}$  in quanto il dominio dell'arcotangente coincide con  $\mathbb{R}$  e l'unica condizione da imporre è l'esistenza del rapporto nel secondo addendo (cioè  $x + 1 \neq 0$ ). Poiché in tale dominio la sua derivata prima risulta

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left[ \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} \right]$$

e questa, dopo qualche passaggio,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = 0 \end{aligned}$$

si riduce ad essere nulla per  $\forall x \in D$ , possiamo applicare il teorema che stabilisce la *costanza di una funzione in un intervallo*  $I = [a, b]$  nell'ipotesi che questa abbia *derivata nulla in I*.

Pertanto possiamo ritenere la  $f(x)$  costante e quindi indipendente da  $x$

- in sottoinsiemi del dominio  $D$  del tipo  $I_1 = [a, b]$  dove  $a > -1 \wedge b > -1$  oppure
- in intervalli  $I_2 = [c, d]$  con  $c < -1 \wedge d < -1$ .

Non potremo invece considerarla costante in intervalli  $[a, b]$  dove sia  $a < -1 \wedge b > -1$  in quanto in tali intervalli la  $f(x)$  non è derivabile in tutti i punti interni e quindi non soddisfa alle ipotesi del teorema. Il testo del quesito appare perciò fuorviante in quanto chiede di dimostrare la costanza di  $f(x)$  senza alcuna condizione (e pertanto, si ritiene, nel dominio  $D$ ).

Per calcolare il valore costante in intervalli del tipo  $I_1$  con  $x > -1$ , è sufficiente calcolare la funzione in un punto qualsiasi, per esempio,  $x = 0$ . Segue che

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \left( \frac{0-1}{0+1} \right) = 0 - \operatorname{arctg}(-1) = - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Se invece  $x < -1$ , per esempio  $x = -\sqrt{3}$ , risulta

$$f(-\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \right) = -\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right)$$

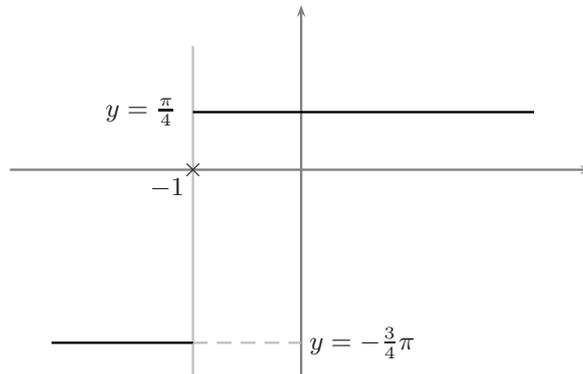
e poiché

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right) = \frac{5}{12}\pi$$

si ha

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{12}\pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

Con queste informazioni possiamo proporre nella figura che segue il grafico della funzione  $f(x)$ .



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x)$ .

# ESAME 2005 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • Problema n. 1

Nel piano  $Oxy$  sono date le curve  $\lambda$  e  $r$  d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \quad \text{e} \quad r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che  $\lambda$  e  $r$  non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto  $P \in \lambda$  che ha distanza minima da  $r$ .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da  $\lambda$  e dalla retta  $s$ , simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ .
4. Si determini il valore di  $c$  per il quale la retta  $y = c$  divide a metà l'area della regione  $S$  del I quadrante compresa tra  $\lambda$  e l'asse  $x$ .
5. Si determini il volume del solido di base  $S$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$  sono quadrati.

Soluzione

## • Problema n. 2

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1, \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, nell'intervallo  $[0, +\infty[$ , un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$  del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

**Questionario**

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$  e  $\sin 36^\circ$ .

Soluzione

2. Si dia una definizione di retta tangente. Successivamente, si dimostri che la curva  $y = x \sin x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\sin x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$ .

Soluzione

3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\phi$  la cui composizione  $\sigma \circ \phi$  dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso  $\phi \circ \sigma$ .

Soluzione

4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Soluzione

5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero  $e$  di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

Soluzione

6. Le rette  $r$  e  $s$  d'equazioni rispettive  $y = 1 + 2x$  e  $y = 2x - 4$  si corrispondono in una omotetia  $\sigma$  di centro l'origine  $O$ . Si determini  $\sigma$ .

Soluzione

7. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Soluzione

8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = e^t + 2$  e  $y = e^{-t} + 3$  nel suo punto di coordinate  $(3, 4)$ .

Soluzione

9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Soluzione

10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Per provare che le curve  $\lambda : x^2 = 4(x - y)$  e  $r : 4y = x + 6$ , rispettivamente una parabola e una retta non hanno punti in comuni è sufficiente dimostrare che il sistema

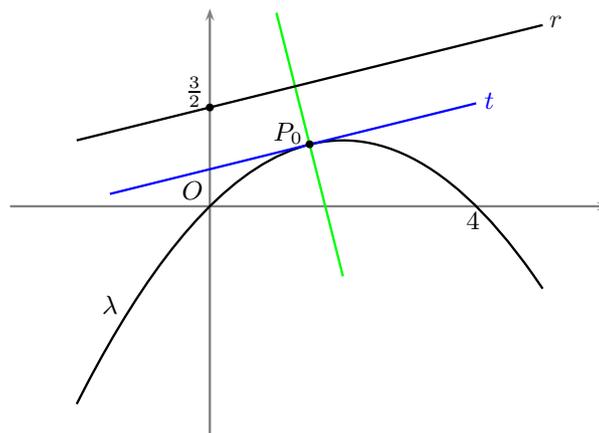
$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ 4y = x + 6 \end{cases}$$

non possiede soluzioni reali. Difatti sostituendo la seconda nella prima riscritta

come  $x^2 = 4x - 4y$ , sia ha  $x^2 = 4x - x - 6$  ossia  $x^2 - 3x + 6 = 0$ . Dato che questa equazione ha un discriminante negativo,  $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$ , le due curve non possono intersecarsi.

2. Per determinare il punto  $P(x_0, y_0) \in \lambda$  che possiede distanza minima si può sfruttare la conoscenza del grafico della parabola.

Difatti riscritta  $\lambda$  come  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ , appare evidente che questa interseca l'asse delle  $x$  nell'origine e nel punto di ascissa 4 (ponendo  $y = 0$  si ottiene  $x = 0$  e  $x = 4$ ). Il suo vertice è il punto  $V(2, 1)$  e la concavità è rivolta costantemente verso il basso in quanto il coefficiente di  $x^2$ ,  $-\frac{1}{4}$ , risulta negativo (fig. 1).



**Fig. 1.** Parabola  $\lambda$  e retta  $r$ .

Da quest'ultimo fatto, segue che il punto  $P_0$  di  $\lambda$  sarà caratterizzato dall'avere la retta tangente  $t$  parallela alla retta  $r : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$  (che pure viene rappresentata in fig. 1). Lo si determina quindi ponendo la derivata di  $\lambda$  uguale al coefficiente angolare di  $r$  (che pure è la derivata di  $r$ ). Pertanto

$$y' = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

La corrispondente ordinata è

$$y_0 = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$$

cosicché  $P_0 \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right)$ .

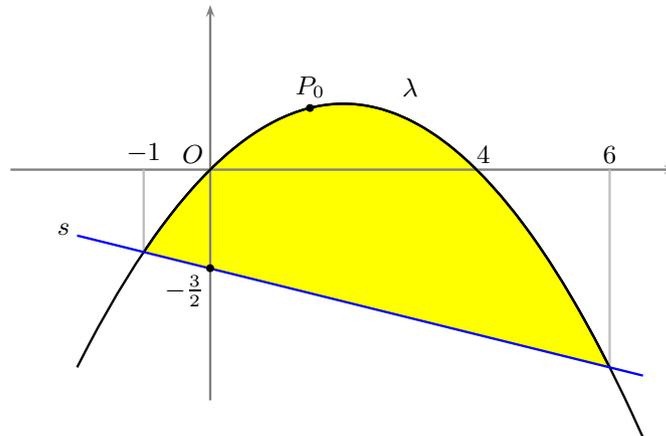
3. Ottenuta la retta  $s$  applicando la trasformazione di simmetria

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

risulta

$$s = \sigma_x(r) \implies 4(-y') = x' + 6 \quad \text{da cui} \quad y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$$

dove nell'ultima espressione si sono lasciati cadere gli apici sostituendo alla generica coppia  $(x', y')$  la coppia  $(x, y)$ .



**Fig. 2.** Parabola  $\lambda$ , retta  $s$  e regione racchiusa.

I punti di intersezione tra  $\lambda$  e  $s$  si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

da cui l'equazione risolvente

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \quad -x^2 + 4x = -x - 6 \quad x^2 - 5x - 6 = 0$$

che possiede le soluzioni  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 6$ . L'area racchiusa tra queste curve (fig. 2) è fornita dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^6 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right) - \left( -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) dx$$

ma, più direttamente, essendo la regione un segmento parabolico, si può utilizzare la formula di Archimede generalizzata cioè

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot |x_2 - x_1|^3$$

che fornisce l'area di un segmento parabolico in termini del coefficiente  $a$  del termine quadratico della parabola (nel nostro caso  $a = -\frac{1}{4}$ ) e delle ascisse,  $x_1$  e  $x_2$ , dei punti di intersezione tra retta e parabola. Risulta quindi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |6 - (-1)|^3 = \frac{1}{24} \cdot 7^3 = \frac{343}{24}.$$

4. La regione  $\mathcal{S}$  è ancora un segmento parabolico compreso tra l'asse delle  $x$  e  $\lambda$  con ascisse degli estremi pari a 0 e a 4 (in colore giallo-verde in fig. 3). Riutilizzando la formula di Archimede la sua area risulta

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |4 - 0|^3 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}.$$

Per determinare l'area della regione compresa tra la retta  $y = c$  e  $\lambda$  (in giallo in fig. 3) sono necessarie le ascisse dei punti di intersezione tra queste due curve e, in particolare, la loro differenza visto che faremo uso ancora della formula di Archimede. Queste si determinano risolvendo il sistema

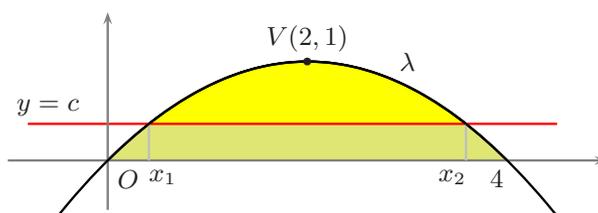


Fig. 3. Parabola  $\lambda$ , retta  $y = c$  e segmenti parabolici.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = c \end{cases}$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4}x^2 + x \implies \frac{1}{4}x^2 - x + c = 0,$$

e sfruttando l'espressione che fornisce direttamente la differenza delle radici di una equazione di II grado  $|x_2 - x_1| = \sqrt{\Delta}/|a|$  risulta

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{1-c}}{(1/4)} = 4\sqrt{1-c}$$

con  $0 < c < 1$  dovendo la retta  $y = c$  appartenere al primo quadrante ed intersecare  $\lambda$  (l'ordinata del vertice  $V$  di  $\lambda$  è pari ad 1). L'area del segmento parabolico (in giallo in fig. 3) è quindi

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |x_2 - x_1|^3 = \frac{1}{24} \cdot |4\sqrt{1-c}|^3$$

e la condizione imposta dal testo si traduce nell'espressione

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{2}\mathcal{A}_S \quad \text{che esplicitamente diviene} \quad \frac{1}{24} \cdot |4\sqrt{1-c}|^3 = \frac{4}{3}.$$

Osservata la positività del termine entro valore assoluto si può riscrivere quest'ultima equazione come

$$(\sqrt{1-c})^3 = \frac{1}{2}$$

per cui, estratta la radice cubica di entrambi i membri

$$\sqrt{1-c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

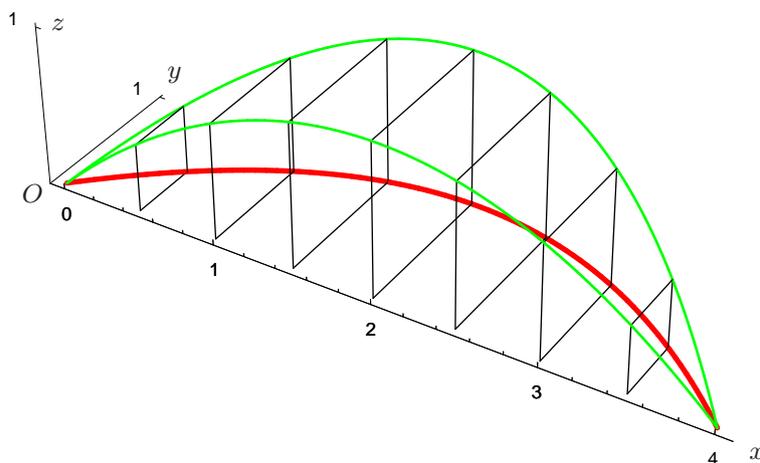
ed elevati al quadrato, otteniamo

$$1-c = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \implies c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0,37.$$

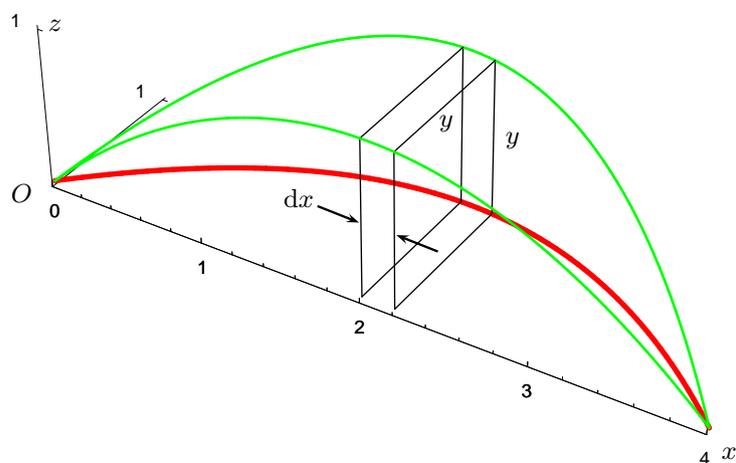
5. Alcune sezioni del solido richiesto sono rappresentate in fig. 4 dove in colore rosso appare sul piano orizzontale  $(x, y)$  l'arco di parabola  $\lambda$  compreso in  $[0, 4]$ . Il calcolo del suo volume  $\mathcal{V}$  può essere ricondotto all'integrale definito

$$\mathcal{V} = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)^2 dx$$

per le ragioni esposte di seguito.



**Fig. 4.** Solido di base  $S$  e sue sezioni quadrate.



**Fig. 5.** Elemento differenziale di volume.

Difatti, se  $dx$  è il differenziale della variabile indipendente  $x$ , il volume infinitesimo di un prisma a base quadrata di lato  $y$  e di altezza  $dx$  risulta (fig. 5)

$$d\mathcal{V} = y^2 dx = \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)^2 dx$$

cosicché il volume totale si ottiene integrando la precedente tra i limiti 0 e 4 ossia

$$\mathcal{V} = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2\right) dx.$$

Ottenuta facilmente una primitiva,

$$\int \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2\right) dx = \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} + c,$$

il calcolo numerico fornisce

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left[ \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{4^5}{80} - \frac{4^4}{8} + \frac{4^3}{3} \\ &= \frac{64}{5} - 32 + \frac{64}{3} = \frac{192 - 480 + 320}{15} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

La soluzione di questo problema è del tutto simile a quella **proposta** per l'esame dei corsi di ordinamento e si differenzia solo quando, nel secondo quesito, si richiede una stima con due cifre decimali corrette della radice dell'equazione

$$f(x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \log x) + 1 = 0.$$

Riprendendo quanto già discusso, ricordiamo che il grafico della funzione  $f(x)$  è, per  $x > e$ , decrescente. Poiché inoltre risulta

$$f(4) = 25 - 16 \ln 4 \approx 2,8192, \quad f(5) = \frac{77}{2} - 25 \ln 5 \approx -1.7359 < 0$$

la radice  $\alpha$  deve appartenere all'intervallo  $\alpha \in ]4, 5[$ . Cerchiamo dapprima una approssimazione con il metodo di bisezione. Calcolando  $f$  nel punto medio si ha

$$f\left(\frac{4+5}{2}\right) = f(4,5) = 0,917433 > 0 \implies 4,5 < \alpha < 5.$$

Alla seconda iterazione si ha

$$f\left(\frac{4,5+5}{2}\right) = f(4,75) = -0,311888 < 0 \implies 4,5 < \alpha < 4,75.$$

Nella tabella seguente riassumiamo i precedenti due risultati iterando poi il metodo fino ad ottenere la seconda cifra decimale corretta ( $n$ , rappresenta l'ordine dell'iterazione,  $a$  e  $b$  sono gli estremi dell'intervallo e  $x_M$  il loro punto medio).

$n$	$a$	$b$	$x_M$	$f(x_M)$
1	4	5	4,5	0,917433
2	4,5	5	4,75	-0,311888
3	4,5	4,75	4,625	0,326701
4	4,625	4,75	4,6875	0,0134411
5	4,6875	4,75	4,71875	-0,147708
6	4,6875	4,71875	4,70313	-0,0667556
7	4,6875	4,70313	4,69531	-0,0265628
8	4,6875	4,69531	4,69141	-0,00653728
9	4,6875	4,69141	4,68945	0,00345781
10	4,68945	4,69141	4,69043	-0,00153826
11	4,68945	4,69043	4,68994	0,000960143
12	4,68994	4,69043	4,69019	-0,000288967
13	4,68994	4,69019	4,69006	0,000335611
14	4,69006	4,69019	4,69012	0,0000233275

Come si vede per giungere a definire correttamente la seconda cifra decimale sono necessarie ben 14 iterazioni del metodo per cui la convergenza della successione verso  $\alpha$  non si può dire particolarmente veloce. Per confronto applichiamo invece il metodo di Newton (o delle tangenti).

Questo si fonda sull'iterazione della espressione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a partire dall'estremo di un intervallo dove la funzione  $f$  assume valori di segno opposto e supposto che, nei punti interni dello stesso, le derivate prima e seconda non siano nulle. Tali condizioni sono soddisfatte dalla funzione data per cui, ottenuta l'espressione esplicita di

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{2}x_n^2(3 - 2 \ln x_n) + 1}{2x_n(1 - \ln x_n)}$$

che si può riscrivere come

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^2(1 - 2 \ln x_n)}{4x_n(\ln x_n - 1)} = g(x_n)$$

e posto  $x_0 = 4$ , il calcolo dei primi valori della successione  $\{x_n\}$  fornisce

$$x_1 = \frac{2 - 16(1 - 2 \ln 4)}{16(\ln 4 - 1)} = g(4) \approx 4,91229$$

$$x_2 = g(4,91229) \approx 4,70351$$

$$x_3 = g(4,70351) \approx 4,69018$$

$$x_4 = g(4,69018) \approx 4,69013.$$

Appare in tal modo evidente come già alla terza iterazione il valore fornito da questo metodo approssimi correttamente  $\alpha$  alla seconda cifra decimale (ma a ben vedere, l'approssimazione è corretta pure fino alla quarta cifra). Quanto osservato è, a meno di cadere in casi particolari, una proprietà generale: il metodo di Newton fornisce approssimazioni numeriche migliori con un numero inferiore di iterazioni cioè, come si suol dire, converge più rapidamente del metodo di bisezione.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 1.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione geometrica stabilisce che la retta  $t$  è tangente ad una curva  $C$  in un suo punto  $P$  se e solo esiste la posizione limite della retta secante  $s$  che unisce i punti  $P$  e  $Q \in C$  al tendere comunque di  $Q$  a  $P$ . In forma del tutto simbolica potremo scrivere

$$P \in C \wedge Q \in C \quad t = \lim_{Q \rightarrow P} s.$$

In altri termini, una retta tangente interseca una curva  $C$  in almeno due punti coincidenti. A livello algebrico, il sistema tra le equazioni rappresentative della

retta  $t$  e della curva  $C$  deve presentare una soluzione con molteplicità pari, o maggiore, a due: il punto corrispondente a questa soluzione sarà il punto di tangenza.

Tutto ciò si può generalizzare ed estendere a due curve qualsiasi,  $C_1$  e  $C_2$ . Queste saranno reciprocamente tangenti in un loro punto  $P$  se e solo se possiedono in questo punto, la medesima retta tangente. Poiché la ricerca della retta tangente ad una curva descritta dall'equazione  $y = f(x)$  è risolto non appena si conosca la derivata  $y' = f'(x)$ ,  $C_1$  e  $C_2$  saranno reciprocamente tangenti in un punto di ascissa  $x_0$  se risulta

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

dove  $y_1 = f(x)$  e  $y_2 = g(x)$  sono le rispettive equazioni rappresentative.

Per la parte restante del quesito si veda quanto già esposto nel quesito 3 dei corsi di ordinamento.

### Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Nella teoria delle trasformazioni geometriche del piano, la composizione  $\sigma \circ \phi$  di due simmetrie assiali,  $\phi$  di asse  $r$  e  $\sigma$  di asse  $s$ , si riduce ad una traslazione quando gli assi  $r$  ed  $s$  di ciascuna simmetria sono paralleli (nel caso siano incidenti, il prodotto di due simmetrie assiali è invece una rotazione). Inoltre, il vettore che caratterizza la traslazione risulta ortogonale alle rette  $r$  ed  $s$ , possiede modulo pari al doppio della distanza tra questi due assi ed è orientato nel verso che va da  $r$  ad  $s$ .

Nel caso proposto dal quesito, il vettore rappresentativo della traslazione risulta  $\vec{v} = (\sqrt{5}, -\sqrt{5})$  (fig. 1) per cui dovremo scegliere delle simmetrie con assi

- a) tra loro paralleli,
- b) aventi distanza  $d$  pari a

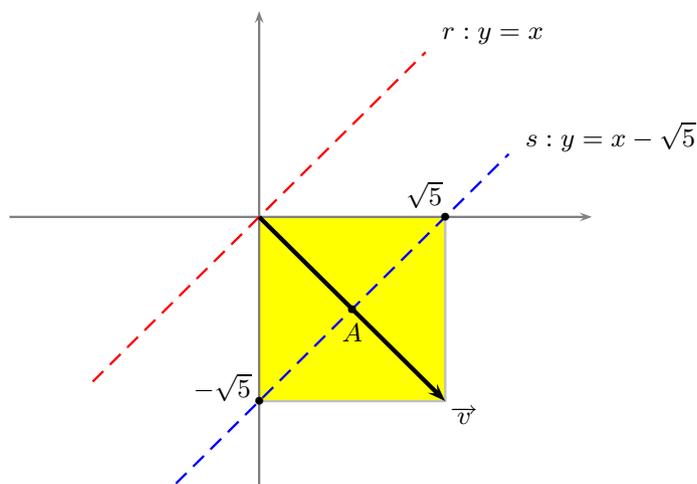
$$d = \frac{1}{2}|\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

- c) ed infine, perpendicolari  $\vec{v}$ .

Vi sono evidentemente infinite possibilità di individuare le trasformazioni richieste (e difatti il testo chiede le equazioni *di* due simmetrie) cosicché effettueremo le scelte che ci appaiono più semplici ed opportune.

Poiché  $\vec{v}$  forma un angolo di  $-45^\circ$  con il semiasse positivo delle ascisse in quanto le sue componenti sono uguali in valore assoluto (fig. 1), tra le rette perpendicolari a  $\vec{v}$  la più immediata appare la bisettrice del I e III quadrante per cui le equazioni della simmetria  $\phi$  (la prima che andrà applicata) avente tale retta come asse sono conosciute e consistono nella coppia

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$



**Fig. 1.** Vettore  $\vec{v}$  e assi di simmetria.

Una retta  $s$ , parallela ad  $r$  che abbia da questa la distanza  $d$  calcolata sopra risulta quella che passa per il punto  $A(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ , centro del quadrato individuato dal vettore  $\vec{v}$  e rappresentato in colore nella figura 1. L'equazione di  $s$  è  $s: y = x - \sqrt{5}$  dovendo intersecare l'asse  $y$  nel punto di ordinata  $-\sqrt{5}$ .

Per ricavare le equazioni della simmetria assiale  $\sigma$  avente  $s$  come asse va ricordato che, in una simmetria assiale, il punto medio del segmento che collega il punto originario  $P(x, y)$  con la sua immagine  $P'(x', y')$  deve appartenere all'asse e cioè  $M(x_M, y_M) \in s$ . Segue quindi che, una prima condizione, è

$$y_M = x_M - \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y' + y}{2} = \left( \frac{x' + x}{2} \right) - \sqrt{5}.$$

La seconda condizione esprime la perpendicolarità del segmento di estremi  $P$  e  $P'$  con la retta  $s$  ossia il coefficiente angolare della retta per  $P$  e  $P'$  dev'essere l'opposto del reciproco del coefficiente angolare,  $m_s = 1$ , di  $s$ . Segue che

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{m_s} = -1.$$

Moltiplicando le due equazioni appena discusse per i denominatori si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y' + y = x' + x - 2\sqrt{5} \\ y' - y = -x' + x \end{cases}$$

per cui, sommando membro a membro, si ottiene  $2y' = 2x - 2\sqrt{5}$  cioè  $y' = x - \sqrt{5}$ . Sostituendo nella prima risulta  $x - \sqrt{5} + y = x' + x - 2\sqrt{5}$  da cui  $x' = y + \sqrt{5}$ .

In definitiva due possibili trasformazioni sono:

$$\phi : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}$$

La composizione di  $\phi$  e  $\sigma$  risulta formalmente

$$\sigma \circ \phi : P(x, y) \xrightarrow{\phi} P(x', y') \xrightarrow{\sigma} P''(x'', y'')$$

mentre le equazioni sono

$$\sigma \circ \phi : P(x, y) \xrightarrow{\phi} P' = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \xrightarrow{\sigma} P'' = \begin{cases} x'' = y' + \sqrt{5} \\ y'' = x' - \sqrt{5} \end{cases}$$

per cui, posto in luogo di  $x'$  e  $y'$  le espressioni fornite da  $\phi$  si ottiene

$$\sigma \circ \phi : \begin{cases} x'' = x + \sqrt{5} \\ y'' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

che costituisce la traslazione aspettata.

La composizione nell'ordine inverso risulta

$$\phi \circ \sigma : P(x, y) \xrightarrow{\sigma} P(x', y') \xrightarrow{\phi} P''(x'', y'')$$

e le sue equazioni sono

$$\phi \circ \sigma : P(x, y) \xrightarrow{\sigma} P' = \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\phi} P'' = \begin{cases} x'' = y' \\ y'' = x' \end{cases}$$

da cui

$$\phi \circ \sigma : \begin{cases} x'' = x - \sqrt{5} \\ y'' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

che rappresentano la traslazione di vettore  $\vec{t} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) = -\vec{v}$ , evidentemente opposto a  $\vec{v}$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello assegnato nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 2.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione del numero  $e$  di Nepero è fornita dal limite della successione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1)$$

oppure, in luogo della successione, si può considerare pure il limite della funzione di variabile reale

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2)$$

L'importanza in analisi matematica di tale numero reale irrazionale

$$e = 2,7182818184\dots$$

consiste nel fatto che la funzione logaritmica ed esponenziale soddisfano in tale base privilegiata ad importanti relazioni quali ad esempio

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad D(e^x) = e^x.$$

La prima permette di definire formalmente  $e$ , *naturalmente*, la funzione  $f(x) = \ln x$ , la seconda mette in evidenza come la funzione esponenziale a base naturale,  $y = e^x$ , abbia se stessa come derivata. Si può dimostrare che la semplice equazione differenziale  $y' = y$  è quindi risolta solo da questa funzione. Nelle scienze fisiche o biologiche le leggi del decadimento di sostanze radioattive o quelle della crescita o, ancora, decadimento, di organismi trovano nelle funzioni esponenziali a base  $e$  la loro rappresentazione più semplice.

La più semplice procedura per calcolare  $e$  fa uso della sua definizione pertanto si dovranno assegnare valori crescenti di  $n$  per ottenere approssimazioni  $a_n$  per difetto di  $e$  dato che la definizione (1) rappresenta il limite di una successione a termini positivi crescente. Volendo disporre di approssimazioni  $b_m$  per eccesso converrà far uso del secondo limite calcolando l'espressione  $(1 + 1/x)^x$  con valori di  $x$  negativi e, via via, decrescenti: pertanto posto  $x = -m$  risulta

$$b_m = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left[1 + \frac{1}{(-m)}\right]^{-m} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m}$$

con  $x < -1$  cioè  $m > 1$ . Le due tabelle sottostanti riportano le prime 10 approssimazioni al numero  $e$ .

$n$	$a_n < e$
1	2
2	2,35
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
6	2,52163
7	2,54650
8	2,56578
9	2,58117
10	2,59374

$m$	$b_m > e$
2	4
3	3,375
4	3,16049
5	3,05176
6	2,98598
7	2,94190
8	2,91029
9	2,88651
10	2,86797
11	2,85312

Appare evidente come la convergenza ad  $e$  sia molto lenta: difatti un calcolo automatico per indici molto grandi fornisce le ulteriori stime

$n$	$a_n < e$	$m$	$b_m > e$
1000	2,71692	1000	2,719642
2000	2,71760	2000	2,718962
3000	2,71783	3000	2,718735
4000	2,71794	4000	2,718622
5000	2,71801	5000	2,718554
6000	2,71805	6000	2,718508
7000	2,71809	7000	2,718476
8000	2,71811	8000	2,718452
9000	2,71813	9000	2,718433
10000	2,71815	10000	2,718418

che mostrano come si possano ottenere le prime tre cifre decimali corrette solo per indici prossimi a 5000. Altri metodi per accelerare la convergenza fanno uso di nozioni non comprese nei programmi.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Le equazioni di una omotetia di centro  $C(x_0, y_0)$  e rapporto  $k \neq 0$  sono

$$\sigma_C : \begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0 \end{cases}$$

cosicché se  $C \equiv O$  queste si riducono alle

$$\sigma : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

Supposto che sia  $s = \sigma(r)$  con  $r : y = 2x + 1$  e  $s : y = 2x - 4$  e cioè che la retta  $s$  sia l'immagine di  $r$ , riscriviamo l'equazione di  $s$  in termini delle coordinate del punto immagine  $(x', y')$  ossia  $s : y' = 2x' - 4$ . Utilizzando le equazioni di  $\sigma$  e sostituendole in  $y' = 2x' - 4$  si ha,  $ky = 2kx - 4$ , da cui

$$y = 2x - \frac{4}{k}$$

ottenuta dividendo per  $k \neq 0$  (in caso contrario avremmo una trasformazione singolare). Questa equazione deve coincidere con quella di  $r$  ma, notato che entrambe possiedono il medesimo coefficiente angolare, l'unica condizione che va posta riguarda i termini noti per cui dev'essere

$$-\frac{4}{k} = 1 \quad \implies \quad k = -4.$$

La trasformazione richiesta è in definitiva

$$\sigma : \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$$

e rappresenta una omotetia inversa avendo  $k < 0$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico al quesito 6 dei corsi di ordinamento cui si rimanda.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La curva  $\mathcal{C}$  è rappresentata in forma parametrica dalla coppia di equazioni

$$\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases}$$

e pertanto non nella forma, più frequente ma meno generale, che vede la variabile reale  $y$  esplicitata a primo membro di un'equazione dove, al secondo, compare solo la variabile indipendente  $x$  ossia  $y = f(x)$ .

Dovendo ricondurci a quest'ultima forma in quanto è in questa forma che si è interpretata la derivata in un punto come il coefficiente angolare della retta tangente, eliminiamo il parametro  $t$  esplicitando  $e^t$  dalla prima equazione parametrica: si ha  $e^t = x - 2$  con  $x - 2 > 0$  in quanto  $e^t > 0$ . Sostituendo questa espressione in

$$y = e^{-t} + 3 = \frac{1}{e^t} + 3 = \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3x-5}{x-2} = f(x)$$

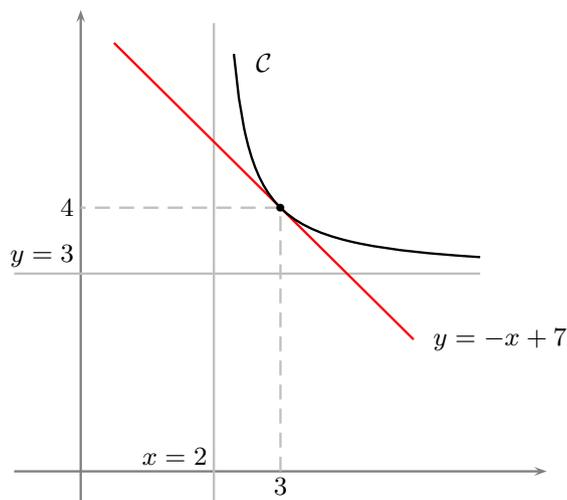
emerge che l'equazione esplicita ottenuta rientra nella forma che caratterizza le funzioni omografiche. Considerando la condizione  $x > 2$ , il grafico di  $\mathcal{C}$  è pertanto quello di un ramo di iperbole equilatera avente per asintoto verticale la retta  $x = 2$  e asintoto orizzontale  $y = 3$ , quest'ultimo ottenuto eseguendo il rapporto dei coefficienti dei termini di primo grado del numeratore e del denominatore (lo si può dedurre anche dalla forma  $y = \frac{1}{x-2} + 3$  della funzione). Poiché sappiamo che  $(3, 4) \in \mathcal{C}$  il grafico di  $\mathcal{C}$  è quello proposto in fig. 1.

È ora immediato determinare l'equazione della retta tangente: difatti, calcolata la derivata prima

$$y' = f'(x) = D\left(\frac{1}{x-2} + 3\right) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

risulta

$$f'(3) = -\frac{1}{(3-2)^2} = -1$$



**Fig. 1.** Grafico della curva  $\mathcal{C}$  e retta tangente.

per cui la retta tangente ha equazione

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \implies y - 4 = -(x - 3)$$

ossia  $y = -x + 7$  (fig. 1).

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia come risultato 10 devono evidentemente uscire le seguenti tre coppie:  $(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$  e  $(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$ . In modo più formale, indicata con  $S$  la variabile aleatoria definita come la somma dei numeri mostrati dai due dadi, si vuole  $P(S = 10)$ . Per quanto detto, all'evento  $X = 10$  concorrono i seguenti tre elementi dello spazio campionario

$$\{S = 10\} = \{(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})\}$$

e dato che tale spazio (detto anche *spazio degli esiti*) è costituito da  $6 \times 6 = 36$  elementi tutti equiprobabili, la probabilità cercata risulta

$$P(S = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Se ora i lanci vengono ripetuti si entra nello schema delle prove ripetute in ciascuna delle quali i soli esiti possibili sono di successo o insuccesso. In una prova, l'evento  $S = 10$  è quindi considerato come un successo e la probabilità  $p$  che ciò avvenga è evidentemente quella determinata appena sopra

$$p = P(S = 10) = \frac{1}{12},$$

mentre l'insuccesso, evento complementare, possiede probabilità

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Introdotta la variabile aleatoria  $K$  per denotare il numero di successi, la probabilità che tale variabile assuma il valore  $K = k$  su  $n$  ripetizioni indipendenti del lancio è fornita dalla distribuzione binomiale o di Bernoulli e risulta

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Poiché il quesito chiede il valore di  $P(K = 2)$  su un totale di  $n = 6$  prove, discende

$$P(K = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-2} = 15 \cdot \frac{1}{144} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^4 \approx 0,0735.$$

La terza domanda del quesito richiede il valore della probabilità  $P(K \geq 2)$  sempre su 6 prove. Poiché in una serie di 6 prove gli eventi caratterizzati da  $K = 2$ ,  $K = 3$ ,  $K = 4$ ,  $K = 5$  e  $K = 6$  sono a due a due disgiunti, la probabilità richiesta si può calcolare ricorrendo al teorema delle probabilità totali per cui

$$P(K \geq 2) = P(K = 2) + P(K = 3) + P(K = 4) + P(K = 5) + P(K = 6).$$

Possiamo comunque seguire anche una via alternativa considerando che l'evento contrario (o complementare),  $K < 2$ , si può decomporre negli eventi

$$\{K < 2\} = \{K = 0\} \cup \{K = 1\}$$

dove a secondo membro appare l'unione di eventi disgiunti. La sua probabilità è quindi  $P(K < 2) = P(K = 0) + P(K = 1)$  e il calcolo di  $P(K \geq 2)$  può ora svolgersi in forma abbreviata. Difatti per il teorema dell'evento complementare risulta

$$\begin{aligned} P(K \geq 2) &= 1 - P(K < 2) \\ &= 1 - [P(K = 0) + P(K = 1)] \\ &= 1 - P(K = 0) - P(K = 1), \end{aligned}$$

che esplicitamente fornisce

$$\begin{aligned} P(K \geq 2) &= 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-0} - \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-1} \\ &= 1 - \frac{11^6}{12^6} - 6 \cdot \frac{11^5}{12^6} \approx 0,0831. \end{aligned}$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito fornisce un valore per l'età media di una popolazione di un Paese e, assieme, propone implicitamente una partizione della stessa popolazione in due classi:

- la prima composta da coloro che hanno un'età maggiore di 60 anni costituisce il 40% del totale,
- la seconda è invece composta da coloro con un'età inferiore ai 60 anni e, evidentemente, rappresenta il restante 60%.

La media fornita va quindi interpretata come una media pesata alla quale contribuiscono due elementi distinti ciascuno con un suo peso.

Formalizziamo il problema rappresentando la prima classe con la variabile  $x$ : questa è costituita da coloro che hanno un'età di  $x$  anni con  $x \geq 60$  e contribuisce alla media della popolazione con un peso  $p_x$  pari a  $p_x = 0,4 = 40/100$ . Analogamente la seconda è espressa dalla variabile  $y$  con peso  $p_y = 0,6 = (100 - 40)/100$  ed è formata da coloro che hanno un'età di  $y$  anni con  $y < 60$  (ed ovviamente  $y > 0$ ). La media pesata  $m$  con tale suddivisione è data dall'espressione

$$m = \frac{p_x x + p_y y}{p_x + p_y}$$

per cui sostituendo  $m = 30$  anni si giunge alla

$$\frac{0,4x + 0,6y}{0,4 + 0,6} = 0,4x + 0,6y = 30 \text{ anni.}$$

Poiché il testo fornisce una condizione solo sulla  $x$ , imponiamo su questa variabile la condizione  $x \geq 60$  per poi dedurre una condizione sull'età  $y$  della restante parte di popolazione. Difatti, esplicitata la  $x$  dalla precedente,

$$x = \frac{30 - 0,6y}{0,4}$$

e posto  $x \geq 60$ , discende

$$\frac{30 - 0,6y}{0,4} \geq 60$$

da cui, moltiplicando per 0,4 risulta

$$30 - 0,6y \geq 24 \quad \implies \quad -0,6y \geq 24 - 30 \quad \implies \quad 0,6y \leq 6.$$

L'ultimo risultato comporta per l'età  $y$  il risultato  $y \leq 10$  che costituisce pure la risposta al quesito.

Se quindi il 60% della popolazione possiede un'età di 10 anni o inferiore, allora la media della popolazione potrà essere di 30 anni. La risposta è quindi affermativa.

Se comunque vogliamo interpretare questi risultati come effettivamente realizzabili la risposta, salvo casi molto particolari, non può che essere negativa. Difatti la popolazione di un Paese è costituita da tutte le classi d'età per cui è praticamente impossibile che vi siano persone unicamente con un'età maggiore di 60 anni o minore di 10 senza alcun rappresentante delle età intermedie. Ma se il Paese è molto piccolo...

# ESAME 2006

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

1) Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Soluzione

## • Problema n. 2

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = 1$ , l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  e dalle rette  $x = 1$  e  $x = 2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

Soluzione

**Questionario**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla  $64^a$  casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di  $50 \text{ cm}^2$ , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

Soluzione

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

Soluzione

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Soluzione

6. L'equazione risolvente un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

7. La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2$  soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo  $[0, 1]$ ? Se sì, trova il punto  $\xi$  che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Soluzione

8. La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo  $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ , eppure non esiste alcun  $x \in I$  tale che  $f(x) = 0$ . È così? Perché?

Soluzione

9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?

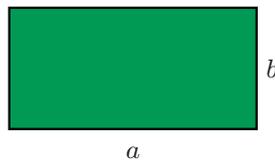
Soluzione

10. La funzione  $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x$  ha un estremo relativo per  $x = \frac{4\pi}{3}$  ed è  $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$ . Si trovino  $a$  e  $b$  e si dica quale è il periodo di  $f(x)$ .

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

- a) Dette  $a$  e  $b$  le lunghezze dei lati dell'aiuola rettangolare con  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$



**Fig. 1.** Dimensioni dell'aiuola rettangolare.

il suo perimetro è  $2a + 2b$  per cui

$$2a + 2b = \lambda \tag{1}$$

con  $\lambda$  che simbolizza la lunghezza del filo metallico ( $\lambda > 0$ ) utilizzato per delimitarne il perimetro: l'area è invece espressa dalla  $\mathcal{A} = a \cdot b$ .

Ricavando  $b$  dalla (1)

$$b = \frac{\lambda - 2a}{2}, \quad (2)$$

la condizione  $b \geq 0$  si riflette su  $a$  come

$$\frac{\lambda - 2a}{2} \geq 0$$

e ciò fissa un limite superiore per la lunghezza di  $a$  ossia  $a \leq \frac{\lambda}{2}$ . La funzione area  $\mathcal{A}$  si può ora esprimere in termini della sola variabile  $a$

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot \left( \frac{\lambda - 2a}{2} \right) = \frac{a}{2}(\lambda - 2a) = -a^2 + \frac{\lambda}{2}a \\ 0 \leq a \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (3)$$

e mostra come l'area dipenda quadraticamente dal lato  $a$  e quindi come il sistema (3) sia rappresentativo di un arco di parabola.

In coerenza con quanto aspettato, osserviamo innanzitutto l'annullarsi dell'area agli estremi dell'intervallo  $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(\lambda/2) = 0$ . Inoltre, poiché la concavità dell'arco di parabola è rivolta verso il basso, il valore massimo di  $\mathcal{A}$  si raggiunge in corrispondenza dell'ascissa del vertice ossia quando

$$a_1 = -\frac{\lambda/2}{2(-1)} = \frac{\lambda/2}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

Notato che tale risultato rientra nell'intervallo dei valori accettabili per  $a$  e ripresa la relazione (2), otteniamo in corrispondenza la lunghezza dell'altro lato

$$b_1 = \frac{\lambda - 2a_1}{2} = \frac{\lambda - \lambda/2}{2} = \frac{\lambda}{4} = a_1$$

dove l'ultima uguaglianza sta ad indicare come l'aiuola debba essere quadrata per soddisfare la condizione di massimo del problema.

b) Sia  $x$  la lunghezza di una parte del filo ed, evidentemente,  $\lambda - x$  la lunghezza della parte rimanente. Le limitazioni per  $x$  sono ovviamente  $0 \leq x \leq \lambda$ . Scegliamo di delimitare con la prima parte l'aiuola di forma quadrata che pertanto avrà un lato lungo  $l_1 = \frac{x}{4}$  (fig. 2), mentre con la seconda si delimiterà quella circolare cosicché la sua circonferenza avrà lunghezza  $2\pi r = \lambda - x$  da cui deduciamo il raggio  $r$  di quest'ultima aiuola

$$r = \frac{\lambda - x}{2\pi}.$$



**Fig. 2.** Aiuola quadrata e circolare.

La somma  $\mathcal{A}$  delle rispettive aree è

$$\begin{cases} \mathcal{A} = (l_1)^2 + \pi r^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{\lambda - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}(\lambda - x)^2 \\ 0 \leq x \leq \lambda. \end{cases} \quad (4)$$

Anche in questo caso la relazione cui si giunge esprime un arco di parabola con la concavità rivolta nella direzione positiva dell'asse della variabile  $\mathcal{A}$ . Il minimo si raggiunge in corrispondenza dell'ascissa del vertice che, questa volta, determiniamo annullando la derivata prima di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'(x)$  cioè

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{2}{16}x + \frac{2}{4\pi}(\lambda - x)(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{8} - \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} = 0.$$

Segue

$$\frac{x}{2} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{4\pi}{4 + \pi} \right) = \frac{4\lambda}{4 + \pi}.$$

Poiché tale valore è interno all'intervallo  $[0, \lambda]$  in quanto manifestamente  $4 < 4 + \pi$ , il filo dovrà essere tagliato alla distanza  $4\lambda/(4 + \pi)$  da una estremità.

c) Per determinare il massimo (assoluto) della funzione  $\mathcal{A}$  vanno confrontati i suoi valori agli estremi dell'intervallo  $[0, \lambda]$ : risulta

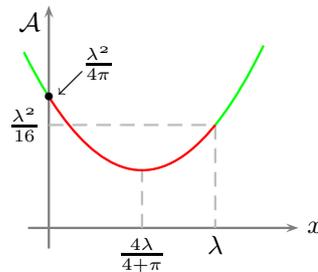
$$x = 0, \quad \mathcal{A}(0) = \frac{\lambda^2}{4\pi}; \quad x = \lambda, \quad \mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{16} + 0 = \frac{\lambda^2}{16}$$

e poiché si ha

$$\frac{\lambda^2}{4\pi} > \frac{\lambda^2}{16} \quad \Longrightarrow \quad 16 > 4\pi \quad \Longrightarrow \quad 4 > \pi$$

il massimo di  $\mathcal{A}$  si raggiunge in corrispondenza di  $x = 0$ . L'interpretazione di tale risultato è la seguente: converrà non tagliare il filo metallico e realizzare una sola aiuola circolare.

La rappresentazione grafica della funzione area totale  $\mathcal{A}(x)$  data da (4) è mostrata in figura 3. Questa mostra come l'area totale abbia un andamento parabolico e

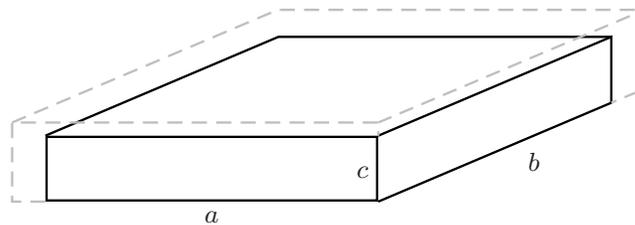


**Fig. 3.** Grafico della funzione area totale  $\mathcal{A}$ .

raggiunga il minimo in corrispondenza del vertice di ascissa  $4\lambda/(4 + \pi)$  mentre il massimo di tale funzione si trova in corrispondenza dell'estremo sinistro dell'intervallo dove la parabola interseca l'asse delle ordinate.

L'ultima richiesta del problema riguarda l'aumento percentuale del volume di un parallelepipedo rettangolo: siano  $a$ ,  $b$  e  $c$  le sue dimensioni originarie (fig. 4). Ne segue che il volume iniziale dell'aiuola è

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c. \quad (5)$$



**Fig. 4.** Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

Aumentando del 10% ogni dimensione le nuove lunghezze,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , dei lati risulteranno

$$a' = a + 10\%a = a + \left(\frac{10}{100}\right)a = \left(1 + \frac{1}{10}\right)a = \frac{11}{10}a = 1,1a$$

e similmente

$$b' = b + 10\%b = \dots = \frac{11}{10}b = 1,1b \quad c' = c + 10\%c = \dots = \frac{11}{10}c = 1,1c,$$

per cui il nuovo volume  $\mathcal{V}'$ , espresso da

$$\mathcal{V}' = a' \cdot b' \cdot c'$$

diviene

$$\mathcal{V}' = a' \cdot b' \cdot c' = (1,1a) \cdot (1,1b) \cdot (1,1c) = (1,1)^3 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Tenendo presente la (5) la precedente diviene

$$\mathcal{V}' = (1,1)^3 \cdot \mathcal{V}$$

e poiché  $(1,1)^3 \approx 1,331$ , si ha  $\mathcal{V}' = 1,331\mathcal{V}$ . Infine, per evidenziare l'aumento percentuale, si può riscrivere quest'ultima come

$$\mathcal{V}' = (1 + 0,331)\mathcal{V} = \mathcal{V} + 0,331\mathcal{V} = \mathcal{V} + 33,1\%\mathcal{V}$$

che mostra come l'aumento percentuale risulti essere del 33,1%. In forma appena alternativa si può risalire a tale valore anche riscrivendo la relazione  $\mathcal{V}' = 1,331\mathcal{V} = (1 + 0,331)\mathcal{V} = \mathcal{V} + 0,331\mathcal{V}$  come

$$\frac{\mathcal{V}' - \mathcal{V}}{\mathcal{V}} = 0,331 = 33,1\%.$$

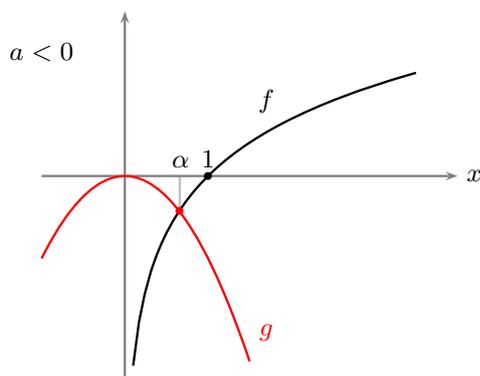
### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. Identificate le funzioni  $f(x) = \ln x$  (scriviamo  $\ln x$  in luogo della notazione  $\log x$  per intendere con maggiore evidenza il logaritmo naturale di  $x$ ) e  $g(x) = ax^2$ , la discussione dell'equazione  $f(x) = g(x)$  per  $x > 0$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  si potrà condurre con i soli metodi dell'Analisi in quanto questa non rientra nella forme tipiche delle equazioni parametriche razionali (o irrazionali) bensì appartiene alle equazioni trascendenti miste che associano a funzioni trascendenti quali quelle circolari o logaritmiche/esponenziali, termini razionali o irrazionali. In linea con quanto posto dal testo del problema, scegliamo quindi di interpretare ciascun membro dell'equazione

$$f(x) = g(x) \quad \ln x = ax^2 \tag{1}$$

come una funzione, rispettivamente  $f$  e  $g$ , per cui la discussione della (1) si può riportare alla ricerca delle intersezioni, e del relativo numero, tra i grafici di queste due funzioni.

Per quanto riguarda il grafico di  $f$  questo è noto rappresentando  $f$  nient'altro che il logaritmo naturale. L'equazione  $g(x) = ax^2$  rappresenta invece  $\forall a \neq 0$  un fascio di parabole con vertice nell'origine di un sistema cartesiano  $Oxy$  mentre nel solo caso  $a = 0$  l'equazione si riduce a  $g(x) = 0$  che rappresenta l'asse delle ascisse di questo stesso sistema. Se  $a < 0$ , le parabole possiedono la concavità rivolta nella direzione negativa di  $y$  (o verso il "basso") e certamente intersecano il grafico del logaritmo in un unico punto di ascissa  $\alpha \in ]0, 1[$  (fig. 1). Nel caso



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a < 0$ .

$a = 0$  il punto di intersezione tra il logaritmo e l'asse  $x$  è ancora unico e possiede ascissa pari ad 1.

Se invece  $a > 0$  si possono presentare più situazioni in quanto all'aumentare di  $a$  la concavità delle parabole oltreché rivolta verso la direzione positiva dell'asse delle ordinate va via via restringendosi. Si potrà passare da due intersezioni a due coincidenti quando le due curve saranno reciprocamente tangenti: infine non si avrà alcuna intersezione. Studiamo quindi il caso in cui  $f(x)$  e  $g(x)$  sono tangenti, situazione dove evidentemente vale l'equazione  $\ln x = ax^2$  assieme alla condizione di tangenza che si traduce nell'uguaglianza delle rispettive derivate nel medesimo punto. Pertanto ne risulta il sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \ln x = ax^2 \\ \frac{1}{x} = 2ax. \end{cases} \quad (2)$$

Dalla seconda si ricava il valore

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (3)$$

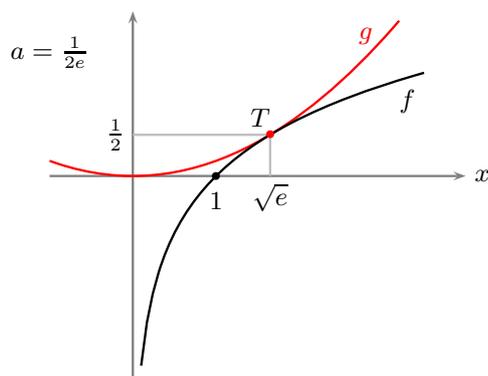
che sostituita nella prima di (2) fornisce l'ascissa del punto di tangenza

$$\ln x = ax^2 \implies \ln = a \cdot \frac{1}{2a} \implies \ln x = \frac{1}{2} \implies x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

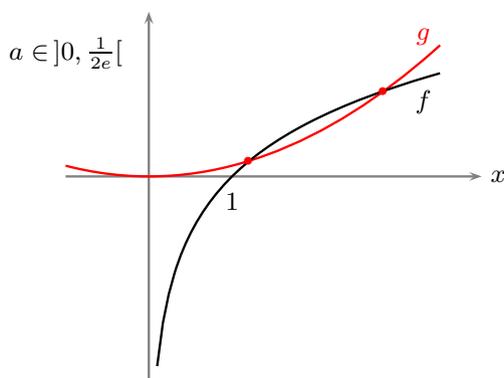
Segue poi da (3) che il valore di  $a$  associato è

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}.$$

In corrispondenza di tale valore i grafici delle due funzioni sono tangenti nel punto  $T(\sqrt{e}, \ln \sqrt{e}) \equiv T(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a = 1/(2e)$ .



**Fig. 3.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $0 < a < 1/(2e)$ .

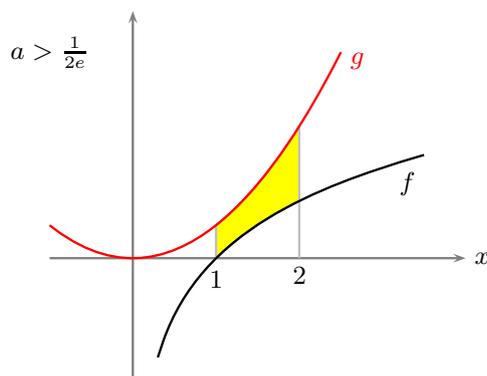
Evidentemente per  $0 < a < 1/(2e)$  la concavità di  $g$  risulta più ampia e le funzioni  $f$  e  $g$  si intersecano in due punti distinti cosicché l'equazione in oggetto ammette due soluzioni distinte (fig. 3).

Infine, se  $a > \frac{1}{2e}$ , la situazione è descritta graficamente dalla fig. 4 dove, per il restringersi della concavità delle parabole del fascio, appare evidente l'assenza di intersezioni con  $f$ . In corrispondenza di tali valori del parametro  $a$  risulta evidentemente soddisfatta  $\forall x > 0$  la disuguaglianza  $ax^2 > \ln x$ .

In conclusione la discussione dell'equazione parametrica assegnata permette di individuare per

$$\begin{array}{ll} a \leq 0 & 1 \text{ soluzione} \\ 0 < a < \frac{1}{2e} & 2 \text{ soluzioni} \\ a = \frac{1}{2e} & 2 \text{ soluzioni coincidenti} \\ a > \frac{1}{2e} & \text{nessuna soluzione.} \end{array}$$

Per  $a = 1/(2e)$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono, come detto, tangenti.



**Fig. 4.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a > 1/(2e)$ .

2. Essendo  $a = 1 > 1/(2e)$  i grafici di  $f$  e  $g$  non si intersecano per cui la situazione è quella rappresentata dalla figura 4 dove  $g(x) = x^2$  giace al di sopra del logaritmo: formalmente per  $x > 0$  è  $x^2 > \ln x$ . L'area richiesta, evidenziata in giallo in fig. 4, si ottiene risolvendo l'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2 - \ln x) dx$$

che per la linearità dell'integrale, si può suddividere e parzialmente risolvere

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2 - \ln x) dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \ln x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \int_1^2 \ln x dx.$$

Il secondo integrale si può risolvere con il metodo per parti considerando  $\ln x$  come il fattore finito e  $dx$  come quello differenziale: si ha

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Il valore dell'area richiesta risulta quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - [x \ln x - x]_1^2 = \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - (2 \ln 2 - 2 + 1) \\ &= \frac{7}{3} - 2 \ln 2 + 1 = \frac{10}{3} - 2 \ln 2 \approx 1,94704. \end{aligned}$$

3. Scelto  $a = 1$  studiamo la funzione  $h(x) = \ln x - x^2$  di dominio, evidentemente,  $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x | x > 0\}$ . Tale funzione non è periodica in quanto  $h(x+T) \neq h(x)$

$\forall T \in \mathbb{R}_0$  e, non essendo  $D$  simmetrico rispetto allo zero, né vi possono essere simmetrie pari o dispari. Avendo osservato nel punto 2 che

$$x^2 > \ln x \quad \text{per } x > 0$$

è pure  $\ln x - x^2 < 0$  cioè  $h(x) < 0$ . Poiché  $h(x)$  risulta somma di funzioni continue, essa pure è continua in  $D$ . Gli unici limiti da svolgersi sono quindi quelli agli estremi del dominio: il primo è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

mentre il secondo è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ . Per risolvere quest'ultimo limite converrà, per non incorrere in un caso di indeterminazione, riscrivere la funzione nella forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right)$$

così da studiare il limite entro parentesi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Poiché il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

esiste, è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0.$$

Segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

e il limite originario risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = -\infty.$$

Con tale risultato la funzione può presentare un andamento asintotico: per stabilirne l'esistenza o meno va analizzato il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x.$$

Procedendo nel modo appena esposto, applicando cioè il teorema di De L'Hôpital, si trova

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = 0.$$

È quindi

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$$

per cui non esistono asintoti obliqui.

Derivata prima. Il calcolo della  $h'(x)$  fornisce

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}$$

e notato che il denominatore è positivo in  $D$ , lo studio del segno  $h'(x) \geq 0$  comporta

$$1 - 2x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi  $h'(x) \geq 0$  se  $0 < x \leq 1/\sqrt{2}$  (fig. 5): di conseguenza  $h(x)$  presenta in  $x = 1/\sqrt{2}$  un punto di massimo assoluto.

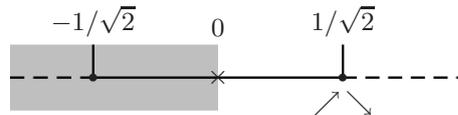


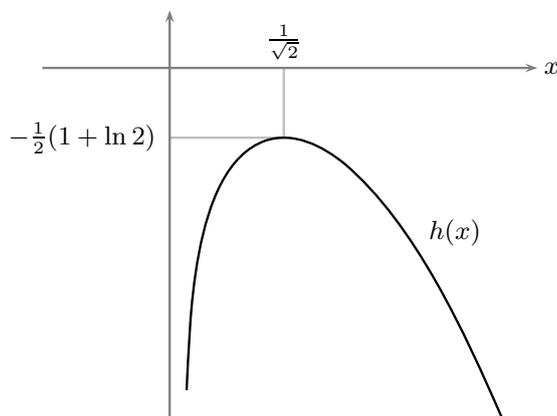
Fig. 5.

La derivata seconda e relativo segno sono

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0 \quad \forall x > 0$$

per cui la concavità è sempre rivolta verso il basso. Notato che l'ordinata del punto di massimo vale

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \ln(2^{-1/2}) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 + \ln 2), \end{aligned}$$



**Fig. 6.** Grafico della funzione  $h(x) = \ln x - x^2$ .

il grafico di  $h(x)$  è in definitiva rappresentato dalla fig. 6.

*Nota.* Pur non richiesto dal testo e nemmeno, ad una attenta lettura, non esplicitamente suggerito, intendiamo qui mostrare come la discussione della soluzione del primo quesito si possa rendere un po' più formale sfruttando conoscenze dell'Analisi piuttosto che rifarci alla conoscenza del comportamento del fascio di parabole  $g(x) = ax^2$  al variare di  $a$ . Intendiamo quindi studiare l'andamento della famiglia di funzioni

$$h_a(x) = \ln x - ax^2$$

al variare del parametro  $a$  con i soli "strumenti" dell'Analisi. In tale contesto discutere le soluzioni di  $\ln x = ax^2$  è equivalente a discutere il numero delle intersezioni di  $h_a(x)$  con l'asse delle  $x$ .

Notato quindi che tutte le funzioni  $h_a(x)$  possiedono dominio  $\mathbb{R}_0^+$  e che in questo dominio sono continue in quanto somma di funzioni continue, affrontiamo lo studio dei limiti per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow +\infty$ . Qualsiasi sia il valore reale di  $a$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_a(x) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 = a \cdot 0 = 0,$$

mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = +\infty \tag{4}$$

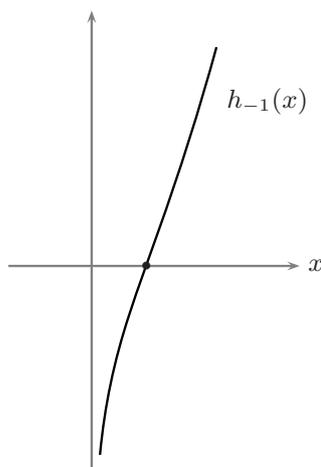
solo se  $a < 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -ax^2 = +\infty.$$

Poiché a ciò si aggiunge l'osservazione sul segno della derivata prima

$$h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

essendo  $1 - 2ax^2 > 0$  quando  $a < 0$ , segue che per tali valori del parametro  $h_a(x)$  rappresenta una funzione monotona strettamente crescente. Poiché i limiti agli estremi del dominio hanno segno opposto, di certo è possibile determinare un intervallo  $[\alpha, \beta]$  ai cui estremi risulti  $h_a(\alpha) < 0$  e  $h_a(\beta) > 0$ . Il teorema di esistenza degli zeri ci permette quindi di dedurre l'esistenza di almeno una, ma per la monotonia, di una sola soluzione dell'equazione  $h_a(x) = 0$ . Un grafico rappresentativo delle funzioni relative a valori di  $a < 0$  appare in fig. 7.



**Fig. 7.** Grafico della funzione  $h_{-1}(x) = \ln x + x^2$ .

Il caso  $a = 0$  riduce  $h_0(x) = \ln x$  e questa funzione, come si sa, incontra l'asse  $x$  nell'unico punto di ascissa  $x = 1$ .

Se  $a > 0$  il risultato del limite precedente per  $x \rightarrow +\infty$  non è più valido e va rivisto in quanto si cade in un caso di indeterminazione. Riscritta però la funzione come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - a \right) \quad (5)$$

questo si risolve con il teorema di De L'Hôpital nello stesso modo già visto ossia, data l'esistenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

è pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{cosicché} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - a \right) = 0 - a = -a$$

e, in definitiva, il **limite** in questione ( $-a < 0$ ) è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = -\infty.$$

Pure il segno della derivata prima cambia: difatti

$$h'_a(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x} \geq 0$$

implica

$$1 - 2ax^2 \geq 0 \implies x^2 \leq \frac{1}{2a} \implies -\frac{1}{\sqrt{2a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

e, considerando il dominio, è

$$h'_a(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Evidenziando graficamente il segno di tale derivata (fig. 8)

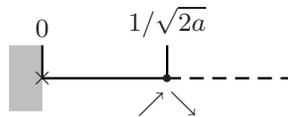


Fig. 8.

appare evidente che tali funzioni presentano in  $x_0 = 1/\sqrt{2a}$  un punto di massimo assoluto di ordinata  $y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= h_a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) - a \cdot \frac{1}{2a} \\ &= \ln(2a)^{-1/2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2a - \frac{1}{2a} \\ &= -\frac{1}{2}(1 + \ln 2a). \end{aligned}$$

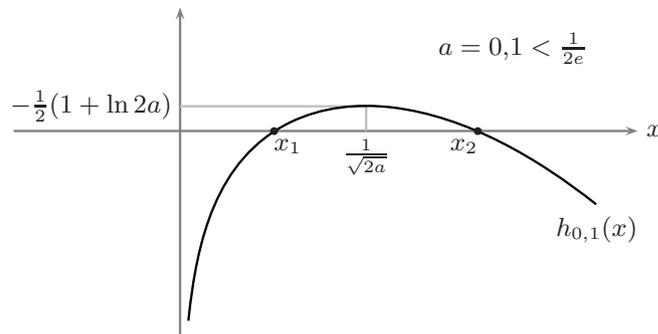
Data la monotonia crescente in  $]0, x_0]$  e decrescente in  $]x_0, +\infty[$ , le funzioni  $h_a(x)$  incontreranno l'asse delle  $x$  in due punti distinti  $x_1, x_2$  quando  $y_0 > 0$ ; se invece  $y_0 = 0$  l'asse delle  $x$  è la retta tangente al grafico di  $h_a(x)$  e vi saranno due valori coincidenti con il valore  $x_0$ . Infine se  $y_0 < 0$  non vi potranno essere intersezioni con tale asse e l'equazione originaria non presenterà soluzioni. Poiché  $y_0 > 0$  implica

$$-\frac{1}{2}(1 + \ln 2a) > 0 \implies 1 + \ln 2a < 0 \implies \ln 2a < -1 \implies 2a < e^{-1}$$

da cui  $a < 1/(2e)$  cosicché  $y_0 = 0$  comporta  $a = 1/(2e)$  e  $y_0 < 0$  è risolta da  $a > 1/(2e)$ , possiamo confermare anche per  $a > 0$  la **discussione** già svolta ossia

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{1}{2e} & \quad 2 \text{ soluzioni} \\ a = \frac{1}{2e} & \quad 2 \text{ soluzioni coincidenti} \\ a > \frac{1}{2e} & \quad \text{nessuna soluzione.} \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo i grafici delle funzioni finora non rappresentate: la fig. 9 è relativa ad un valore di  $a$  minore di  $1/(2e)$  e mostra le due intersezioni e le rispettive ascisse soluzioni dell'equazione originaria.

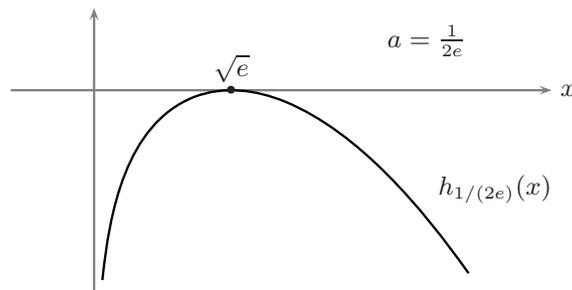


**Fig. 9.** Grafico della funzione  $h_{0,1}(x) = \ln x - 0,1x^2$ .

La fig. 10 rappresenta il grafico in corrispondenza di  $a = 1/(2e)$ . Con tale valore l'ascissa del punto di massimo risulta

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{1/e}} = \sqrt{e}$$

e in tale punto, curva e asse  $x$  sono mutuamente tangenti.



**Fig. 10.** Grafico della funzione  $h_{1/(2e)}(x) = \ln x - \frac{1}{2e}x^2$ .

Per  $a > 1/(2e)$  si ottengono andamenti analoghi a quelli descritti dalla fig. 6.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Cerchiamo innanzitutto di individuare il legame tra il numero di caselle (in totale 64) e quello del numero dei chicchi di grano. Se quindi nella prima casella si dispone un chicco di grano, due sulla seconda, quattro sulla terza, otto sulla quarta, sedici sulla quinta, . . . , appare evidente che nel passaggio da una casella alla successiva il numero, a partire da un chicco, raddoppia. La schematizzazione di tale successione può pertanto essere

casella	numero chicchi
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
⋮	⋮
63	$2^{62}$
64	$2^{63}$

che mostra come in corrispondenza della  $64^a$  casella corrisponda un numero di chicchi pari a  $2^{63} = 2^{64-1}$ . Pertanto nella  $i$ -esima casella, il numero corrispondente di chicchi è  $2^{i-1}$ . Il numero totale di chicchi  $\mathcal{S}$  si ottiene sommando i 64 termini della seconda colonna ossia

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{62} + 2^{63} \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}, \end{aligned}$$

numero che si può riscrivere in forma compatta come

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}. \quad (1)$$

Notiamo che la successione del numero dei chicchi  $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ , costituisce una progressione geometrica di ragione 2 in quanto ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicando quest'ultimo per 2: in termini ricorsivi è

$$a_{i+1} = 2 \cdot a_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

mentre il termine generale  $i$ -esimo è espresso, come visto sopra, da  $a_i = a_1 \cdot 2^{i-1}$  con  $a_1 = 1$  per cui  $a_i = 2^{i-1}$ . Poiché la somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $q \neq 1$  è fornita dall'espressione

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

dove nel nostro caso abbiamo  $a_1 = 1$ ,  $q = 2$ ,  $n = 64$ , il numero di chicchi è

$$\mathcal{S} = 1 \cdot \left( \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = -1 (1 - 2^{64}) = 2^{64} - 1. \quad (2)$$

Possiamo ora impostare una proporzione per ottenere il peso  $P$  in grammi della quantità  $\mathcal{S}$  sapendo che 1000 chicchi pesano 38 g:

$$\frac{1000}{38} = \frac{\mathcal{S}}{P} \quad \Longrightarrow \quad P = \left( \frac{\mathcal{S}}{10^3} \right) \cdot 38 \text{ g}$$

Sostituendo il risultato (2) e riportando il calcolo in notazione scientifica

$$P = \frac{2^{64} - 1}{10^3} \cdot 38 \text{ g} \approx 7,00976 \times 10^{17} \text{ g},$$

non rimane che trasformarlo in tonnellate (ton) sapendo che

$$1 \text{ ton} = 10^3 \text{ kg} = 10^3 \times 10^3 \text{ g} = 10^6 \text{ g} \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ g} = 10^{-6} \text{ ton:}$$

si ottiene infine

$$P = 7,00976 \times 10^{17} \times 10^{-6} \text{ ton} \approx 7,01 \times 10^{11} \text{ ton},$$

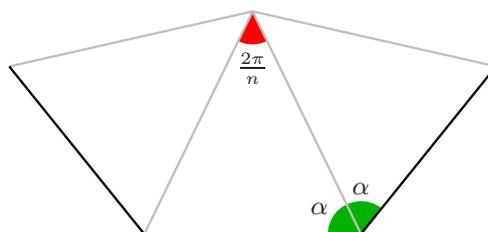
una quantità di grano... non certo trascurabile!

#### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Ricordiamo che un poliedro è una figura solida delimitata da poligoni non appartenenti al medesimo piano ognuno dei quali si chiama faccia e tali da avere ciascun lato, detto spigolo, in comune con una seconda faccia. In particolare, i poliedri regolari sono caratterizzati dall'avere tutte le facce costituite da poligoni regolari congruenti e, in aggiunta, tutti gli angoloidi uscenti da ciascun vertice, cioè le regioni dello spazio formate dalle facce con vertice in comune, debbono essere a loro volta congruenti.

Consideriamo un poliedro regolare convesso costituito da poligoni regolari di  $n$  lati: intendiamo determinare una relazione tra l'angolo interno di ciascuna faccia poligonale e il possibile numero di facce convergenti in un medesimo vertice.

A tal fine, congiunto il centro di un poligono regolare di  $n$  lati con i suoi vertici, si vengono a formare  $n$  triangoli isosceli ciascuno dei quali ha un angolo al vertice di ampiezza  $\frac{2\pi}{n}$  (in fig. 1 se ne sono tracciati tre).



**Fig. 1.** Angolo interno di un poligono.

Sfruttando la nota proprietà sulla somma degli angoli interni di un triangolo, l'angolo alla base  $\alpha$  è quindi uguale a

$$\alpha + \alpha = \pi - \frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi$$

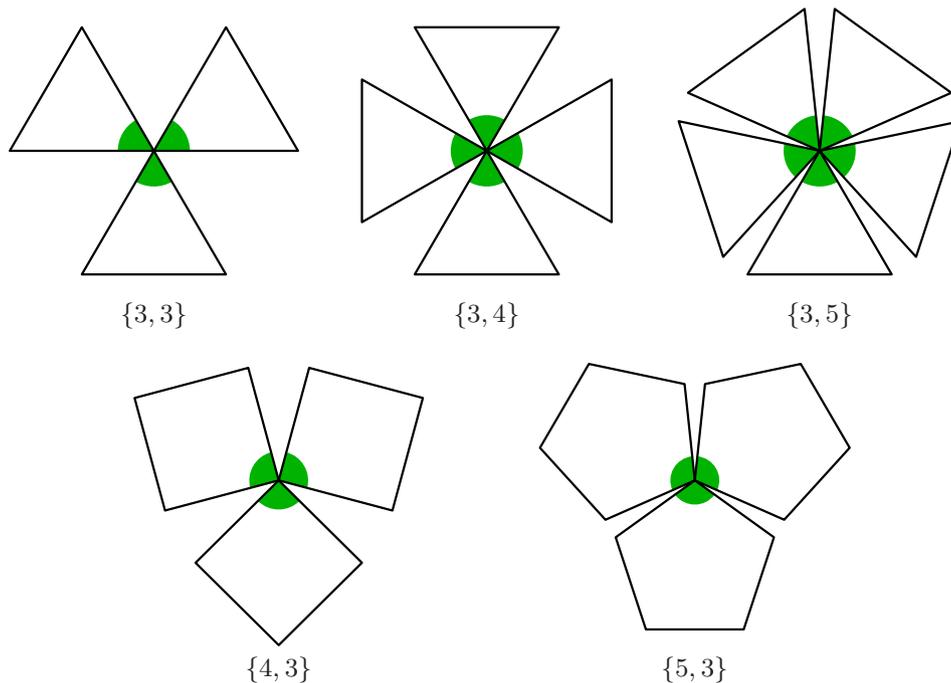
mentre l'angolo interno  $2\alpha$  definito da una qualsiasi coppia di lati del poligono (fig. 1) risulta essere

$$2\alpha = \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi.$$

Sia  $q$  il numero degli spigoli uscenti da ogni vertice del poliedro e quindi pure il numero delle facce uscenti da tale vertice: certamente  $q \geq 3$ . Ora immaginiamo di distendere ciascuna di queste facce in un piano (fig. 2): la somma  $\mathcal{S}$  di tutti gli angoli uscenti da tale vertice, rappresentata da

$$\mathcal{S} = q \cdot (2\alpha) = q \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi$$

dev'essere minore di  $2\pi$  ossia queste facce non potranno ricoprire un angolo maggiore o uguale all'angolo giro rendendo, in caso contrario, impossibile la costruzione del poliedro regolare (si veda sempre la fig. 2).



**Fig. 2.** Facce di un poliedro regolare uscenti dal medesimo vertice.

Questa osservazione intuitiva si può formalizzare con il teorema di geometria solida che afferma: *in un angoloide, la somma delle facce (cioè degli angoli delle facce uscenti da uno stesso vertice) è minore di un angolo giro.*

Segue da tale teorema la disuguaglianza

$$q\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi < 2\pi$$

da cui, moltiplicando per  $n$  ed eliminando  $\pi$  si ottiene,

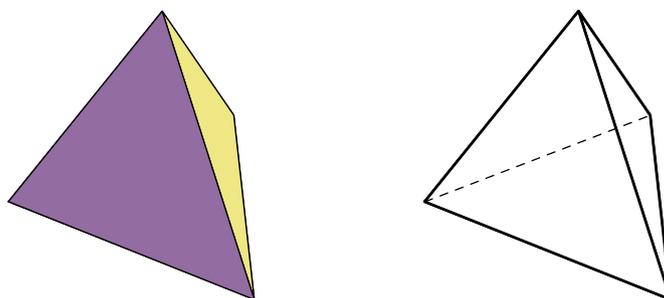
$$q(n - 2) < 2n. \quad (1)$$

Al variare di  $q$  e  $n$ , quest'ultima relazione deve essere sempre soddisfatta: studiamone quindi le possibili soluzioni  $\{n, q\}$  con  $n, q \in \mathbb{N}$  (la coppia  $\{n, q\}$ , è detta, simbolo di Schläffi).

Poiché  $n$  non può essere minore di 3 (il poligono con il minor numero di lati è il triangolo equilatero!), supponiamo inizialmente  $n = 3$  ossia che le facce siano dei triangoli equilateri. La (1) fornisce

$$q(3 - 2) < 2 \cdot 3 \quad \text{da cui} \quad q < 6.$$

Dato che, come detto, pure  $q \geq 3$ , i casi possibili corrispondono a  $q = 3$ ,  $q = 4$  oppure  $q = 5$ . Ciascuno di questi dà origine ad un poligono regolare: difatti la coppia  $\{3, 3\}$  origina il tetraedro, poliedro composto da quattro triangoli equilateri tre dei quali formano le facce concorrenti in uno qualsiasi dei quattro vertici (fig. 3)

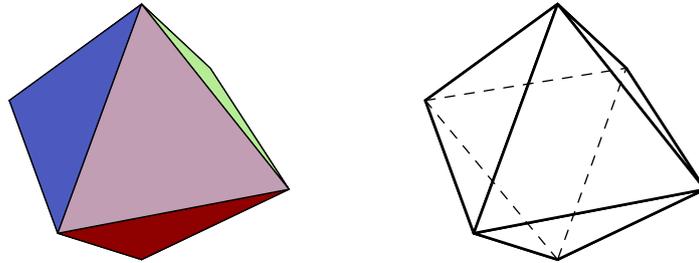
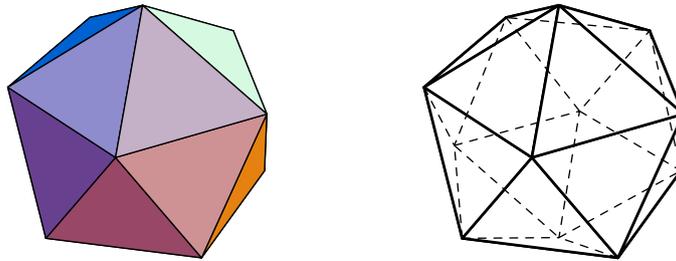
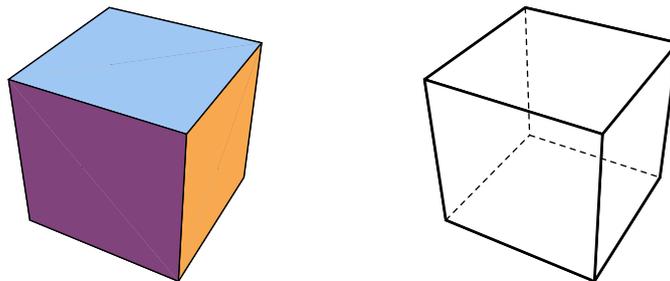


**Fig. 3.** Tetraedro  $\{3, 3\}$ .

Se  $q = 4$  si ottiene l'ottaedro, poliedro con 8 facce equilateri, quattro delle quali uscenti da uno qualsiasi dei 6 vertici (fig. 4).

Se poi  $q = 5$  si può costruire l'icosaedro dove ogni vertice è circondato da cinque triangoli equilateri per un totale di 20 facce equilateri (fig. 5).

Passando ad  $n = 4$  cioè richiedendo che ciascuna faccia sia un quadrato da (1) si ricava  $q(4 - 2) < 2 \cdot 4$  da cui  $q < 4$ . Si può presentare quindi solo il caso con

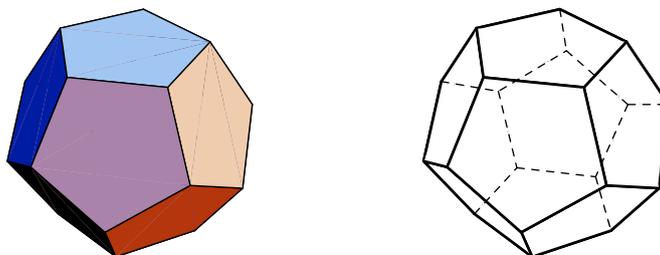
Fig. 4. Ottaedro  $\{3, 4\}$ .Fig. 5. Icosaedro  $\{3, 5\}$ .Fig. 6. Cubo o esaedro  $\{4, 3\}$ .

$q = 3$  cui corrisponde il ben noto cubo o esaedro (6 facce quadrate, tre uscenti da ciascun vertice, fig. 6)

Se le facce sono dei pentagoni  $n = 5$  la (1) fornisce la condizione  $q(5 - 2) < 2 \cdot 5$  da cui  $q < \frac{10}{3}$  che ammette come unica soluzione, ancora,  $q = 3$ . Si può in tal caso costruire il dodecaedro, composto da 12 facce pentagonali, tre delle quali attorno ad ogni vertice (fig. 7)

Infine, sia  $n \geq 6$ : dalla (1) si ottiene

$$q(n - 2) < 2n \quad \implies \quad qn - 2q < 2n \quad \implies \quad n(q - 2) < 2q$$

Fig. 7. Dodecaedro  $\{5,3\}$ .

da cui, dividendo per  $q - 2 > 0$  si ha

$$n < \frac{2q}{q-2}.$$

È pertanto

$$6 \leq n < \frac{2q}{q-2}$$

e di conseguenza

$$6 < \frac{2q}{q-2} :$$

risolvendo in  $q$  risulta

$$6q - 12 < 2q \quad \implies \quad q < 3,$$

valore che evidentemente non può essere accettabile. Non vi possono quindi essere ulteriori soluzioni oltre a quelle già discusse per cui, in definitiva, le sole coppie possibili sono  $\{3,3\}$ ,  $\{3,4\}$ ,  $\{3,5\}$ ,  $\{4,3\}$ ,  $\{5,3\}$  a ciascuna delle quali, come visto, si associa il rispettivo solido platonico (del quale, ovviamente, si può dimostrare l'esistenza \*).

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

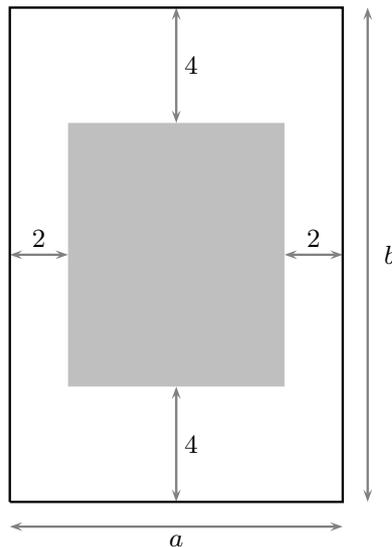
Siano  $a$  e  $b$  le dimensioni incognite del foglio di carta ( $a > 0$  e  $b > 0$ ). Le restrizioni imposte dal quesito sono: area di stampa  $\mathcal{A}_s = 50 \text{ cm}^2$ , margini superiore ed inferiore pari a 4 cm, margini destro e sinistro di 2 cm, mentre si chiede di determinare le dimensioni del foglio di area  $\mathcal{A}$  minima (fig. 1).

L'area  $\mathcal{A}$  e le condizioni sulle sue dimensioni si esprimono come

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

---

\* Per sperimentare in modo interattivo con i solidi platonici si veda la pagina web <http://www.lorenzoroi.net/maths.html#solidiplatonici>.



**Fig. 1.** Dimensioni del foglio e parametri di stampa (in cm).

mentre la restrizione sull'area fissa di stampa si riporta come

$$\mathcal{A}_s = 50 \text{ cm}^2 = (a - 4) \cdot (b - 8)$$

essendo  $a - 4$  la lunghezza del lato orizzontale del rettangolo di stampa e  $b - 8$  quella del lato verticale (fig. 1). Evidentemente questi valori devono essere positivi per cui  $a - 4 > 0$  cioè  $a > 4$  e  $b - 8 > 0$  che implica  $b > 8$ . Gli elementi coinvolti finora si riassumono nel sistema di condizioni

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b \\ (a - 4)(b - 8) = 50 \\ a > 4 \\ b > 8. \end{cases}$$

Per ricondurre l'area  $\mathcal{A}$  ad una funzione di una variabile ricaviamo  $b$  dalla seconda equazione del sistema sostituendola poi nella prima

$$b - 8 = \frac{50}{a - 4} \quad \implies \quad b = 8 + \frac{50}{a - 4} = \frac{8a + 18}{a - 4}$$

per cui

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b = a \cdot \left( \frac{8a + 18}{a - 4} \right) = 2 \left( \frac{4a^2 + 9a}{a - 4} \right) \\ a > 4. \end{cases}$$

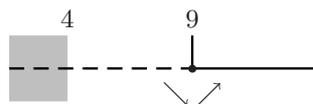
Volendo ricercare il minimo (assoluto) di  $\mathcal{A}$  passiamo al calcolo della derivata prima: questo fornisce

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= 2 \left[ \frac{(8a+9)(a-4) - (4a^2+9a)}{(a-4)^2} \right] \\ &= \frac{2}{(a-4)^2} (8a^2 - 32a + 9a - 36 - 4a^2 - 9a) \\ &= \frac{2}{(a-4)^2} (4a^2 - 32a - 36) \\ &= \frac{8}{(a-4)^2} (a^2 - 8a - 9).\end{aligned}$$

La condizione  $\mathcal{A}' \geq 0$  comporta lo studio di  $a^2 - 8a - 9 \geq 0$  data la positività dei termini rimanenti. La sua equazione associata ammette le soluzioni

$$a^2 - 8a - 9 = 0 \quad a_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+9} \quad \implies \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 9$$

per cui  $\mathcal{A}' \geq 0$  è risolta per  $a \leq -1 \vee a \geq 9$ . La rappresentazione grafica di  $\mathcal{A}'$  (fig. 2) mette in evidenza l'esistenza di un minimo in corrispondenza del valore  $a = 9$  cm: tale minimo è quello assoluto in quanto alla sua sinistra  $\mathcal{A}$  è decrescente mentre è crescente per  $a > 9$ .



**Fig. 2.** Segno di  $\mathcal{A}'$ .

In corrispondenza

$$b = \frac{8 \cdot 9 + 18}{9 - 4} = 18 \text{ cm}$$

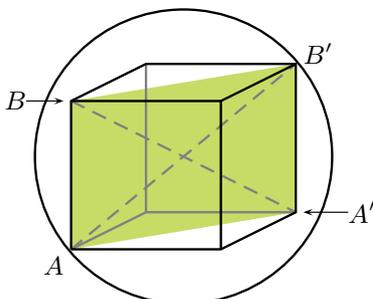
per cui possiamo concludere che le dimensioni del foglio dovranno essere pari a 9 cm  $\times$  18 cm.

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

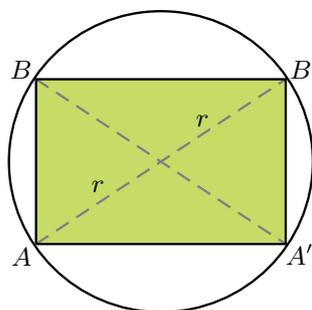
Il cubo inscritto in una sfera di diametro  $2r = 1$  m ha le proprie diagonali, quali per esempio  $AB'$  e  $BA'$  di fig. 1, di lunghezza pari al diametro della sfera.

Sezioniamo cubo e sfera con un piano passante per il centro di quest'ultima che è pure il centro del cubo (punto d'incontro delle sue diagonali) e per i vertici  $A$ ,  $B$ ,  $B'$  e  $A'$ . La figura piana che ne risulta mostra evidentemente un rettangolo inscritto in un cerchio (fig. 2).

Per determinare la lunghezza del lato  $\overline{AB} = l$  del cubo (figg. 1 e 2) e quindi determinarne il volume, notiamo innanzitutto che la diagonale della sua sezione



**Fig. 1.** Cubo inscritto in una sfera.



**Fig. 2.** Sezione piana del cubo inscritto nella sfera.

piana scelta coincide con il diametro della sfera per cui è  $\overline{AB'} = 2r$ . Il segmento  $\overline{BB'} = \overline{AA'}$  costituisce invece la diagonale di base del cubo per cui la lunghezza è quella della diagonale di un quadrato di lato  $l$  cioè  $\overline{BB'} = l\sqrt{2}$ . Il teorema di Pitagora permette di collegare tali segmenti con la relazione

$$\overline{AB'} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BB'}^2}$$

che implica

$$2r = \sqrt{l^2 + (l\sqrt{2})^2} = \sqrt{l^2 + 2l^2} = l\sqrt{3} :$$

il lato cercato è quindi

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}} r.$$

Ovviamente a tale conclusione si poteva giungere direttamente ricordando che tra lato e diagonale  $d = 2r$  del cubo, sussiste la relazione  $d = l\sqrt{3}$ .

Ricordando che  $r = \frac{1}{2}$  m, il volume  $\mathcal{V}$  del cubo risulta

$$\mathcal{V} = l^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} r\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ m}^3$$

e dato che  $1 \text{ m}^3 = 10^3$  litri, si ha in definitiva

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (10^3 \text{ l}) = \frac{10^3}{3\sqrt{3}} \text{ l} \approx 192,45 \text{ l}.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Ritenuta nota la formula dello sviluppo del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1)$$

si potrà ottenere a secondo membro la somma dei coefficienti di tale sviluppo non appena si ponga  $a = b = 1$  in quanto  $1^{n-k} = 1^k = 1, \forall n, k \in \mathbb{N}$ . Segue dalla (1)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che è quanto richiesto dal quesito.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Riportate le ampiezze angolari ai radianti  $15^\circ = \frac{\pi}{12}$  e  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ , il quesito fornisce il sistema di condizioni

$$\begin{cases} k \cos 2x - 5k + 2 = 0 \\ \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{R}$  chiedendo di discutere l'equazione parametrica assegnata cioè di determinare come varia il numero delle soluzioni (accettabili) dell'equazione in funzione dei valori del parametro  $k$ . Posto quindi  $x' = 2x$ , il sistema parametrico precedente si riscrive

$$\begin{cases} k \cos x' - 5k + 2 = 0 \\ 2 \cdot \frac{\pi}{12} < 2x < 2 \cdot \frac{\pi}{4} \implies \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

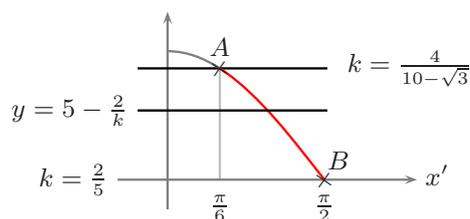
Poiché il grafico del coseno tra  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{2}$  è conosciuto (è pure decrescente) e notato che se  $k = 0$  non vi sono soluzioni in quanto  $2 \neq 0$ , possiamo riscrivere l'equazione come

$$\begin{cases} \cos x' = 5 - \frac{2}{k} \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

per cui, posto  $y = \cos x'$ ,

$$\begin{cases} y = \cos x' \\ y = 5 - \frac{2}{k} & k \neq 0 \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

la discussione delle soluzioni si può ricondurre alla ricerca delle intersezioni tra l'arco di grafico del coseno relativo all'intervallo  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  e il fascio di rette orizzontali  $f$  rappresentato dalla seconda equazione. Nella figura 1 sono evidenziati in colore i punti del grafico del coseno accettabili ed alcune rette del fascio.



**Fig. 1.** Grafico di  $\cos x'$  e rette orizzontali.

Data la monotonia del coseno nell'intervallo dato, appare evidente come il fascio  $f$  intersechi in un sol punto il grafico del coseno. In particolare le rette di  $f$  per i punti  $A$  e  $B$  (fig. 1)

$$A\left(\frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

corrispondono ai valori del parametro

$$y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - \frac{2}{k} \implies \sqrt{3}k = 10k - 4 \implies k = \frac{4}{10 - \sqrt{3}} \approx 0,4838$$

e

$$y_B = 0 = 5 - \frac{2}{k} \implies 5k - 2 = 0 \implies k = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Se osserviamo che la funzione

$$y = 5 - \frac{2}{k}$$

risulta monotona strettamente crescente in  $\mathbb{R}_0^+$  in quanto tale funzione (che è una funzione omografica) possiede derivata prima  $y' = 2/k^2$  positiva, possiamo essere certi che ad ogni valore di  $k$  dell'intervallo  $]\frac{2}{5}, \frac{4}{10 - \sqrt{3}}[$  corrisponda pure una sola retta orizzontale e quindi, per quanto detto, un'unica intersezione. In base a tale corrispondenza biunivoca tra i valori di  $k$  e le intersezioni del fascio

$f$  con il coseno, concludiamo ammettendo l'esistenza di un'unica soluzione in corrispondenza dei valori del parametro appartenenti all'intervallo aperto

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10 - \sqrt{3}}. \quad (2)$$

Volendo evitare queste osservazioni sulla corrispondenza biunivoca tra i valori del parametro  $k$  e l'esistenza di una sola retta orizzontale corrispondente, si può risolvere il sistema (1) esplicitando il parametro  $k$  in un membro ossia applicando il metodo del "cosiddetto" parametro separato. Si ottiene allora

$$\begin{cases} k = \frac{2}{5 - \cos x'} \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

per cui posto  $y = k$  si dovranno studiare le intersezioni di un fascio di rette orizzontali (di immediata interpretazione) con l'arco di curva di equazione  $y = 2/(5 - \cos x')$  cioè

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5 - \cos x'} \\ y = k \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Poiché la derivata prima della funzione

$$y' = D\left(\frac{2}{5 - \cos x'}\right) = \frac{-2 \operatorname{sen} x'}{(5 - \cos x')^2}$$

risulta negativa  $y' < 0$ ,  $\forall x' \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  in quanto per tali valori  $-2 \operatorname{sen} x' < 0$ , la funzione stessa è ivi strettamente decrescente e quindi il fascio  $y = k$  incontrerà in un sol punto il relativo grafico. Determinati i valori del parametro in corrispondenza degli estremi dell'intervallo

$$x' = \frac{\pi}{6} \implies k = \frac{2}{5 - \cos(\pi/6)} = \frac{2}{5 - (\sqrt{3}/2)} = \frac{4}{10 - \sqrt{3}}$$

e

$$x' = \frac{\pi}{2} \implies k = \frac{2}{5 - \cos(\pi/2)} = \frac{2}{5}$$

si può concludere la discussione affermando l'esistenza di un'unica soluzione dell'equazione originaria per i valori di  $k$  compresi tra questi estremi (nello stesso modo dato da (2)).

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$  rappresenta una cubica tangente all'asse  $x$  nell'origine di un sistema cartesiano  $Oxy$  e tale da intersecare ulteriormente quest'asse nel suo punto di ascissa 2.

Poiché  $f(x)$  è continua in  $\mathbb{R}$  e quindi pure in  $[0, 1]$ , derivabile internamente con derivata prima  $f'(x) = 3x^2 - 4x$  per  $x \in ]0, 1[$ , essa soddisfa alle ipotesi del teorema di Lagrange per cui deve  $\exists \xi \in ]0, 1[$  tale che

$$f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \quad \Longrightarrow \quad 3\xi^2 - 4\xi = \frac{-1 - 0}{1}.$$

Quest'ultima conduce all'equazione  $3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0$  che ammette le due soluzioni

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 = \frac{1}{3}, \quad \xi_2 = 1.$$

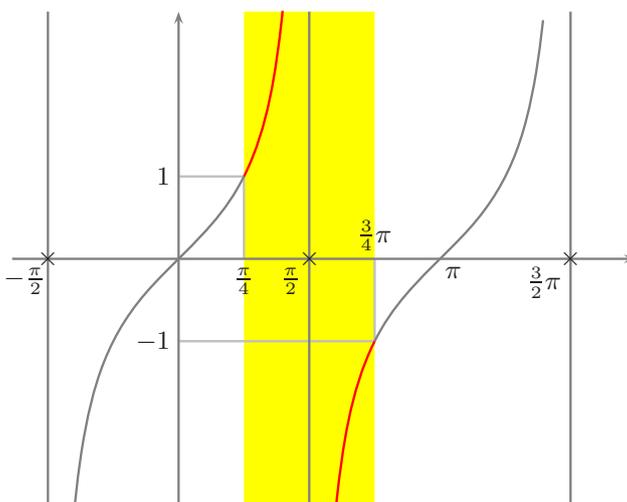
Il punto di ascissa  $\xi$ , come detto, è interno all'intervallo cosicché solo  $\xi = \frac{1}{3}$  rappresenta l'ascissa del punto cercato.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  rientra nelle funzioni elementari ed è ben conosciuta. In particolare i suoi valori agli estremi dell'intervallo suggerito sono

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 > 0 \quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = -1 < 0.$$

La fig. 1 riporta il grafico della tangente in un intervallo pari a due periodi e mette in evidenza la parte compresa tra  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3}{4}\pi$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $\operatorname{tg} x$ .

Da tale grafico appare evidente come non vi sia alcun punto in  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$  dove sia  $\operatorname{tg} x = 0$ .

Difatti a tale funzione, non può applicarsi il teorema di esistenza degli zeri (o teorema di Bolzano, Praga 1781–1848) in quanto l'ipotesi di continuità della funzione in tale intervallo non è soddisfatta non esistendo la tangente in  $\frac{\pi}{2}$ , punto interno all'intervallo in questione. Poiché valgono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

la funzione  $\operatorname{tg} x$  presenta di conseguenza in  $x = \frac{\pi}{2}$  una discontinuità di seconda specie.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $y = f(x)$ , la funzione incognita  $f(x)$  soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che, a ben vedere, sono quelle tipiche della funzione esponenziale a base naturale. Comunque, procedendo in modo formale riscriviamo la prima “equazione” sfruttando la forma differenziale della derivata in quanto questa notazione permette una più immediata distinzione tra funzione e variabile indipendente: in tal modo la prima condizione diviene

$$\frac{dy}{dx} = y$$

che, supposto  $y \neq 0$ , si riscrive come

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Quest'ultima può vedersi come una relazione tra differenziali coinvolgente la funzione incognita  $y$ . È in effetti una semplice equazione differenziale che si risolve attraverso l'integrazione indefinita

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx.$$

Entrambi gli integrali sono immediati e forniscono

$$\ln |y| = x + c$$

da cui, prendendo gli esponenziali di entrambi i membri,

$$|y| = e^{x+c} = e^x \cdot e^c.$$

Abbiamo pertanto le due possibilità

$$\begin{cases} y = e^x \cdot e^c \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -y = e^x \cdot e^c \\ y < 0. \end{cases} \implies y = -e^x \cdot e^c$$

Imponendo la condizione  $f(0) = 1$ , il primo sistema comporta  $1 = e^0 \cdot e^c$ , da cui  $1 = e^c$  risolta da  $c = 0$ , mentre la seconda possibilità  $1 = -e^0 \cdot e^c$ ,  $e^c = -1$  non fornisce alcuna soluzione. Notato che  $e^x \neq 0$ , concludiamo indicando la

$$y = f(x) = e^x$$

come la funzione cercata.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Dato che  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  la condizione  $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$  si esplicita facilmente in

$$a \sin \frac{2}{3}\pi + b \cos \frac{2}{3}\pi = 1$$

che implica la relazione tra i coefficienti incogniti  $a$  e  $b$

$$a \frac{\sqrt{3}}{2} - b \frac{1}{2} = 1 \implies a\sqrt{3} - b = 2. \quad (1)$$

Il fatto che  $f(x)$  presenti un estremo relativo in  $x = \frac{4}{3}\pi$  si traduce nell'annullarsi della sua derivata prima in questo punto in quanto l'espressione  $a \sin x + b \cos x$  non presenta in  $\mathbb{R}$  punti singolari. Siccome pure la sua derivata

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x$$

è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ne segue

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0 \implies a \cos \frac{4}{3}\pi - b \sin \frac{4}{3}\pi = 0$$

che diviene

$$-\frac{a}{2} - b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \implies -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \implies a = b\sqrt{3}.$$

Introdotta questo risultato in (1) si ottiene

$$b\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - b = 2 \implies 3b - b = 2 \implies b = 1$$

per cui  $a = \sqrt{3}$ . Dev'essere pertanto  $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ .

Ricordata la periodicità delle funzioni goniometriche seno e coseno

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos} x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la periodicità  $T$  della  $f(x)$  ne deriva immediatamente in quanto, per  $T = 2\pi$ , vale l'identità

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sqrt{3} \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \operatorname{cos}(x + 2\pi) \\ &= \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alla medesima conclusione si giunge riscrivendo la funzione come

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{3} \left( \operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cos} x \right) \\ &= \sqrt{3} \left( \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x \right) = \sqrt{3} \left[ \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\operatorname{cos}(\pi/6)} \operatorname{cos} x \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{cos}(\pi/6)} \left( \operatorname{sen} x \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 2 \operatorname{sen} \left[ \left( x + 2\pi \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 2 \operatorname{sen} \left[ x + 2\pi + \frac{\pi}{6} \right] \\ &= 2 \operatorname{sen} \left[ \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi \right] = 2 \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

# ESAME 2006 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Soluzione

## • Problema n. 2

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = -e^2$ , l'area che è compresa tra i grafici di  $f$  e  $g$  (con  $x > 0$ ) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazione  $y = -1$  e  $y = -2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

Soluzione

**Questionario**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla  $64^a$  casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

3. In un piano sono dati una retta  $r$  e due punti  $A$  e  $B$  ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine  $r$ . Si trovi il più breve cammino che congiunga  $A$  con  $B$  toccando  $r$ .

Soluzione

4. Si dimostri che l'equazione  $\operatorname{sen} x = x - 1$  ha una e una sola radice  $\alpha$  e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare  $\alpha$  con la precisione voluta.

Soluzione

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Soluzione

6. L'equazione risolvente un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

7. Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Soluzione

8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità  $\geq 0,99$  di colpirlo almeno una volta?

Soluzione

9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?

Soluzione

10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di  $\pi$  utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

Il problema è identico a quello proposto nei corsi di ordinamento. Si rimanda pertanto alla **soluzione** là svolta per tale problema.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Per la discussione del primo punto si veda quanto esposto nel corrispondente **quesito** assegnato nell'analogo problema di Ordinamento.
2. Posto  $a = -e^2 < 0$  la parabola  $g(x) = -e^2x^2$  volge la concavità verso il basso e, per quanto **discusso** precedentemente, interseca  $f(x) = \ln x$  in un unico punto. Poiché il testo richiede l'area compresa tra  $f$  e  $g$  appartenente alla striscia di

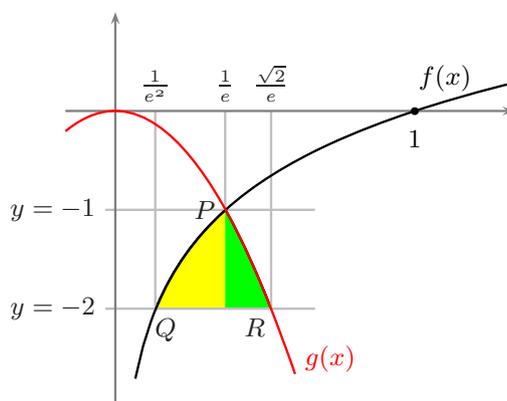
piano delimitata dalle rette orizzontali  $y = 1$  e  $y = 2$ , determiniamo i punti di intersezione di queste due funzioni con tali rette. Per  $f$

$$\ln x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

mentre per  $g$ ,

$$-e^2 x^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{e^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

in quanto  $x > 0$ . Deduciamo pertanto che i grafici di  $f$  e  $g$  si devono intersecare nel punto  $P\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = -e^2 x^2$ .

La retta  $y = -2$  incontra invece  $f$  nel punto  $Q$  la cui ascissa è soluzione di  $\ln x = -2$ : risulta  $x_Q = e^{-2} = 1/e^2$ . Il punto  $R$  di intersezione della medesima retta con  $g$  possiede ascissa positiva soluzione della equazione  $-e^2 x^2 = -2$ . Quest'ultima implica  $x^2 = 2/e^2$  che ammette la soluzione positiva  $x_R = \sqrt{2}/e$ .

L'area  $\mathcal{A}$  richiesta è data dalla somma delle aree evidenziate in colore nella figura 1 ciascuna delle quali si ottiene con l'integrale definito della differenza tra l'equazione della curva superiore con quella inferiore ( $y = -2$  in entrambi i casi): la prima (in giallo in fig. 1) è data da

$$\int_{1/e^2}^{1/e} [\ln x - (-2)] dx$$

mentre la seconda (in verde) da

$$\int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} [-e^2 x^2 - (-2)] dx.$$

cosicché  $\mathcal{A}$  risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{1/e^2}^{1/e} [\ln x - (-2)] dx + \int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} [-e^2 x^2 - (-2)] dx \\ &= \int_{1/e^2}^{1/e} (\ln x + 2) dx + \int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} (-e^2 x^2 + 2) dx.\end{aligned}$$

L'unico termine non elementare coinvolto nell'integrazione riguarda l'integrale della funzione logaritmo che, comunque, si può risolvere applicando il metodo per parti identificando il fattore differenziale con  $dx$ . Risulta

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

per cui l'area richiesta si calcola tramite

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [x \ln x - x + 2x]_{1/e^2}^{1/e} + \left[ -e^2 \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{1/e}^{\sqrt{2}/e} \\ &= [x \ln x + x]_{1/e^2}^{1/e} + \left[ -\frac{e^2}{3} x^3 + 2x \right]_{1/e}^{\sqrt{2}/e}\end{aligned}$$

Sostituendo opportunamente risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left[ \frac{1}{e} \ln \left( \frac{1}{e} \right) + \frac{1}{e} \right] - \left[ \frac{1}{e^2} \ln \left( \frac{1}{e^2} \right) + \frac{1}{e^2} \right] + \left( -\frac{e^2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{e^3} + \frac{2\sqrt{2}}{e} \right) + \frac{e^2}{3e^3} - \frac{2}{e} \\ &= -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} - \frac{2\sqrt{2}}{3e} + \frac{2\sqrt{2}}{e} + \frac{1}{3e} - \frac{2}{e} \\ &= \frac{1}{e^2} - \frac{5}{3e} + \frac{4\sqrt{2}}{3e} \approx 0,2159\end{aligned}$$

Un'alternativa al calcolo appena sviluppato può essere quella che scambia le variabili  $x$  e  $y$  applicando la trasformazione di simmetria assiale  $x' = y$  e  $y' = x$  così da riportare il calcolo dell'integrale nell'intervallo  $[-2, -1]$ . In tal modo le equazioni

$$y = -e^2 x^2 \quad y = \ln x \quad \text{con} \quad x \geq 0 \wedge y \leq 0$$

diventano

$$x' = -e^2 (y')^2 \quad x' = \ln y' \quad \text{con} \quad y' \geq 0 \wedge x' \leq 0.$$

Esplicitando la variabile dipendente  $y'$  dalla prima si ottiene

$$(y')^2 = -\frac{x'}{e^2} \quad \Longrightarrow \quad |y'| = \frac{1}{e}\sqrt{-x'} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{e}\sqrt{-x'}$$

in quanto  $x' \leq 0$  e  $y' \geq 0$ , mentre la seconda fornisce  $y' = e^{x'}$ .  
L'area richiesta è ora rappresentata dall'integrale

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} \left[ \frac{1}{e}\sqrt{-x'} - e^{x'} \right] dx'$$

per cui, osservato che

$$\int \sqrt{-x'} dx' = -\frac{2}{3}(-x')^{3/2} + c \quad \int e^{x'} dx' = e^{x'} + c,$$

si giunge all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ -\frac{2}{3e}(-x')^{3/2} - e^{x'} \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{2}{3e} - \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \cdot 2^{3/2} + \frac{1}{e^2} \\ &= \frac{1}{e^2} - \frac{5}{3e} + \frac{4\sqrt{2}}{3e} \approx 0,2159 \end{aligned}$$

che conferma quanto già trovato.

3. La soluzione è analoga a quella del terzo punto del corrispondente problema nel corso di Ordinamento.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

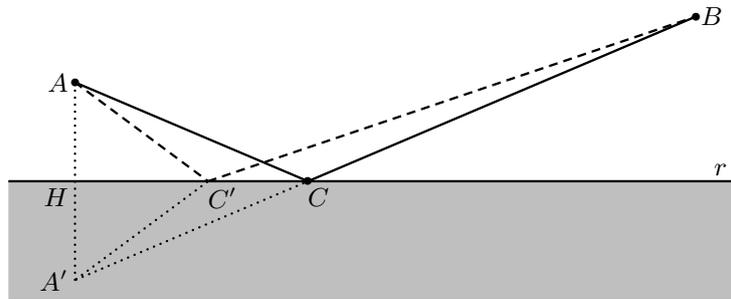
Per la soluzione si veda il quesito n. 1 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 2 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Il problema riprende il classico argomento della riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano e il conseguente percorso seguito. Lo si può risolvere utilizzando osservazioni di tipo puramente geometrico: sia quindi  $A'$  il



**Fig. 1.** Possibili percorsi  $A \rightarrow C \rightarrow B$ .

punto simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $r$  e  $C$  il punto di contatto del percorso  $A \rightarrow C \rightarrow B$  con la retta  $r$  (fig. 1).

Dimostriamo che tale punto è determinato dalla intersezione del segmento  $A'B$  con  $r$ , simbolicamente  $\{C\} = r \cap A'B$ , e che il percorso  $A \rightarrow C \rightarrow B$  è il più breve.

Ragioniamo per assurdo negando che  $C$  sia il punto che definisce il percorso più breve. Esiste quindi un altro punto  $C' \in r$  distinto da  $C$  tale che

$$\overline{AC'} + \overline{C'B} < \overline{AC} + \overline{CB}. \quad (1)$$

Siccome per costruzione  $A'$  è il simmetrico di  $A$  rispetto ad  $r$  per cui  $AA' \perp r$  con  $\{H\} = r \cap AA'$ , le seguenti coppie di triangoli rettangoli sono congruenti

$$\triangle AHC' \simeq \triangle A'HC' \quad \wedge \quad \triangle AHC \simeq \triangle A'HC. \quad (2)$$

Ne segue che  $\overline{AC'} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{AC} = \overline{A'C}$  e la relazione (1) diviene

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B} < \overline{A'C} + \overline{CB} : \quad (3)$$

dato che  $\overline{A'C} + \overline{CB} = \overline{A'B}$  otteniamo da (3) la conclusione

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B} < \overline{A'B}$$

in evidente contraddizione con la disuguaglianza triangolare applicata a  $\triangle A'C'B$  che invece afferma  $\overline{A'C'} + \overline{C'B} \geq \overline{A'B}$ . Il punto di intersezione tra  $r$  e  $A'B$  definisce pertanto quell'unico punto di  $r$  che assicura il percorso di lunghezza minima tra  $A$  e  $B$  toccando  $r$ .

*Nota.* Dalla congruenza dei triangoli espressa nella (2) si ha pure la congruenza tra gli angoli (fig. 2)

$$\angle ACH \simeq \angle A'CH \simeq \angle BCK$$

per cui ne discende la relazione  $\hat{i} = \hat{r}$  tra le ampiezze dell'angolo di incidenza  $\hat{i}$  e quello di riflessione  $\hat{r}$  (fig. 2), uguaglianza che costituisce la ben nota legge della riflessione dei fenomeni ondulatori.

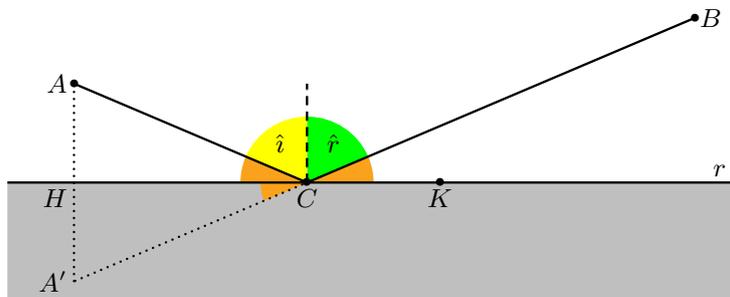


Fig. 2. Legge della riflessione.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione  $\sin x = x - 1$  si può reinterpretare come il sistema

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = x - 1 \end{cases}$$

e in tal modo la ricerca delle sue soluzioni viene a coincidere con quella delle intersezioni tra le due funzioni del sistema e i rispettivi grafici che, in tal caso, sono conosciuti e rappresentati in figura 1.

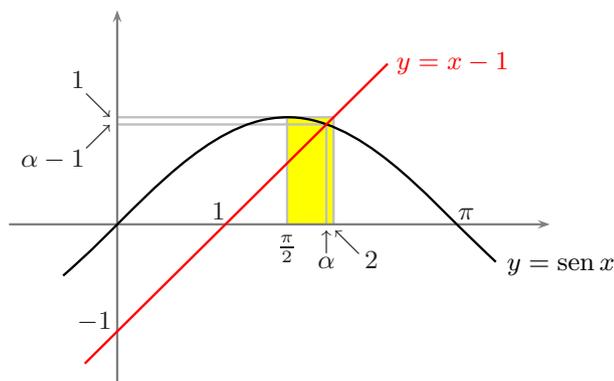


Fig. 1. Grafici di  $y = \sin x$  e  $y = x - 1$ .

In termini geometrici approssimativi, i due grafici appaiono intersecarsi in un punto di ascissa  $\alpha$  compreso tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ . In particolare, poiché l'ordinata del punto di intersezione (cioè  $\alpha - 1$ ) è minore di 1 e il punto sulla retta di ordinata unitaria possiede ascissa

$$y = 1 \quad \implies \quad 1 = x - 1 \quad \implies \quad x = 2,$$

dovrà essere  $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2$ .

La formalizzazione di tali osservazioni si può ottenere studiando le proprietà della funzione  $f(x) = \sin x - x + 1$ . Questa risulta continua in  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo  $[\frac{\pi}{2}, 2]$ . Inoltre risulta

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \wedge \quad f(2) = \sin 2 - 2 + 1 = -1 + \sin 2 < 0$$

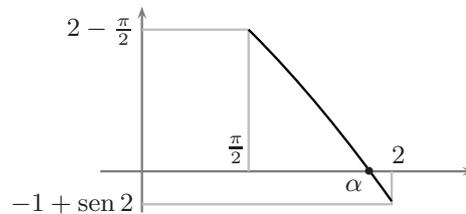
cosicché agli estremi  $f(x)$  assume valori di segno opposto. È quindi possibile applicare il teorema di esistenza degli zeri (o teorema di Bolzano, Praga 1781–1848) che assicura l'esistenza di almeno un punto  $\alpha$  dove  $f(\alpha) = 0$ . Se infine, osserviamo che

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ma certamente

$$f'(x) < 0 \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right],$$

allora la  $f(x)$  in tale intervallo è monotona strettamente decrescente e tale valore  $\alpha$  è quindi unico (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafico di  $y = \sin x - x + 1$  con  $x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$ .

Per determinare  $\alpha$  e quindi rispondere alla seconda parte del quesito, applichiamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo  $[\frac{\pi}{2}, 2]$ . Pertanto, come prima iterazione, calcoliamo il valore medio,  $x_M$  tra questi estremi cioè

$$x_M = \frac{(\pi/2) + 2}{2} = \frac{\pi}{4} + 1$$

Poiché

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{\pi}{4} - 1 + 1 \approx 0,191663 > 0$$

sarà, nella seconda iterazione,

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} + 1, 2\right].$$

Procedendo nello stesso modo si ottiene la seguente **tabella** ( $a$  = estremo inferiore,  $b$  = estremo superiore,  $x_M$  valore medio di  $[a, b]$ ):

$n$	$a$	$b$	$x_M$	$f(x_M)$
1	$\pi/2$	2	1,7854	0,191663
2	1,7854	2	1,8927	0,0559361
3	1,8927	2	1,94635	-0,0160447
4	1,8927	1,94635	1,91952	0,0202838
5	1,91952	1,94635	1,93294	0,00220368
6	1,93294	1,94635	1,93964	-0,00689953
7	1,93294	1,93964	1,93629	-0,00234268

Come si vede, si giunge a stimare  $\alpha$  con due cifre decimali corrette,  $\alpha \approx 1,93$ , in corrispondenza dell'iterazione  $n = 7$ .

Volendo invece ricorrere al metodo di Newton, nel quale la convergenza è generalmente più veloce, dobbiamo esplicitare la relazione ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

partendo da un valore  $x_0$  dato. Tenuto conto che  $f'(x) = \cos x - 1$ , la (1) diviene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n + 1}{\cos x_n - 1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

per cui, scelto  $x_0 = 2$  otteniamo per la prima iterazione

$$x_1 = 2 - \frac{\sin 2 - 2 + 1}{\cos 2 - 1} \approx 1,9360.$$

Nella seconda

$$x_2 = x_1 - \frac{\sin x_1 - x_1 + 1}{\cos x_1 - 1} \approx 1,9346.$$

Da un confronto con quanto ottenuto **sopra**, il valore di  $\alpha$  appare conosciuto a meno di un centesimo già dalla prima iterazione.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 5 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 6 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione *classica* di probabilità di un evento come

*rapporto tra i casi favorevoli all'evento e quelli possibili,*

è applicabile quando questo conteggio diviene possibile ma ciò non è sempre realizzabile. La definizione *frequentista* che considera la probabilità di un evento come

*la frequenza calcolata su un numero sufficientemente elevato di prove,*

si può applicare quando gli eventi siano ripetibili e per i quali si possa disporre di conteggi che informino su quante volte un evento si è verificato in un numero elevato di prove. Vi sono comunque eventi che non rientrano in nessuna delle precedenti due definizioni: per questo B. De Finetti poteva affermare che “*la probabilità non esiste*”. Difatti ad un evento del tipo — *domani risolvo tutti i problemi d'esame* — non è possibile assegnare con le precedenti definizioni alcun valore di probabilità.

Tale limitatezza delle definizioni viene superata dalla definizione *soggettivista* che afferma

*la probabilità di un evento è la misura della fiducia che un individuo coerente attribuisce al verificarsi di tale evento*

e nella interpretazione di B. De Finetti diviene

*la probabilità di un evento è il valore o prezzo  $p$  che un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere una vincita pari ad 1 nel caso si verifichi l'evento.*

Se quindi, per riprendere l'esempio, stimassi di risolvere tutti i problemi d'esame all'80% nella giornata di domani, allora vuol dire che  $p = 0,8$  e quindi sono disposto a scommettere per esempio, 80 euro, in cambio di una vincita di 100 euro nel caso risolvessi tutti i problemi d'esame.

### **Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $p = 0,3$  la probabilità di colpire il bersaglio e quindi di aver successo in una singola prova e  $q = 1 - p = 0,7$  la probabilità contraria cioè di non colpire il bersaglio. Poiché la probabilità  $p_{n,k}$  che su  $n$  prove (o tiri) vi siano  $k$  successi è data dalla distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (1)$$

sia  $P_n(k \geq 1)$  la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio (sempre su  $n$  prove). Essendo  $P_n(k = 0)$  la probabilità su  $n$  prove di non colpirlo, vale evidentemente

$$P_n(k \geq 1) + P_n(k = 0) = 1$$

ossia si è certi che su  $n$  tiri il bersaglio potrà essere colpito oppure no. Dato che  $P_n(k=0) = p_{n,0}$ , per (1) discende

$$\begin{aligned} P_n(k \geq 1) &= 1 - P_n(k=0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0 \cdot q^{n-0} \end{aligned}$$

ma

$$\binom{n}{0} = 1, \quad p^0 = 1$$

per cui

$$P_n(k \geq 1) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot q^n = 1 - q^n.$$

La condizione imposta dal quesito su tale probabilità è di avere  $P_n(k \geq 1) \geq 0,99$  che implica

$$1 - q^n \geq 0,99 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leq 1 - 0,99 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leq 0,01$$

che, con  $q = 0,7$ , diviene  $(0,7)^n \leq 10^{-2}$ . Prendendo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri e sfruttando la proprietà che  $\log x^\alpha = \alpha \log x$

$$\log 0,7^n \leq \log 10^{-2} \quad \Longrightarrow \quad n \log 0,7 \leq -2$$

da cui, dividendo per  $\log 0,7 < 0$

$$n \geq \frac{-2}{\log 0,7}.$$

Dato che

$$\frac{-2}{\log 0,7} \approx 12,91$$

dev'essere  $n \geq 12,91$  e quindi, per avere una probabilità maggiore di 0,99 di colpire il bersaglio almeno una volta, il numero  $n$  dei tiri dovrà essere uguale o superiore a 13.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 9 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è sostanzialmente analogo al numero 7 proposto nella prova d'esame dell'anno 2003, corso P.N.I. In questo caso non si chiede di verificare l'uguaglianza numerica espressa da

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (1)$$

ma solo di calcolare un'approssimazione di  $\pi$  stimando numericamente il valore dell'integrale definito. Le osservazioni sono quindi le medesime ma questa volta, intendiamo applicare il metodo dei trapezi (o di Bezout) così da poterlo affiancare a quello dei rettangoli applicato nell'occasione ricordata.

Analogamente a quello dei rettangoli, nel metodo dei trapezi si suddivide l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  in  $n$  intervallini di uguale ampiezza

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e di estremi} \quad x_i = h \cdot i + a \quad \text{con} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ciascun intervallino dà poi origine ad un trapezio di altezza  $h$  e basi (verticali) pari al valore della funzione negli estremi dell' $i$ -esimo intervallino cioè  $f(x_i)$  e  $f(x_{i+1})$ . Supposta la funzione positiva nell'intervallo  $[a, b]$ , l'area di ciascun intervallino risulta

$$a_i = \frac{1}{2} h \cdot [f(x_{i+1}) + f(x_i)],$$

mentre la stima dell'area complessiva si ottiene sommando questi  $n$  valori

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_{i+1}) + f(x_i)].$$

Estratto il fattore comune  $h/2$  e sostituiti esplicitamente i valori degli estremi si giunge all'espressione finale

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1) + a] + f(hi + a)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nel caso proposto dal quesito la stima numerica di  $\pi$  si ottiene non appena si abbia una stima dell'integrale definito a II membro della (1). Questo esprime l'area  $\mathcal{A}$  della regione compresa tra il grafico della funzione integranda

$$f : y = \frac{1}{1+x^2},$$

l'asse delle  $x$  e le rette  $x = 0$  e  $x = 1$ . Studiamo quindi, almeno approssimativamente, il grafico di  $f$  per individuare tale regione (detta comunemente, trapezoide).

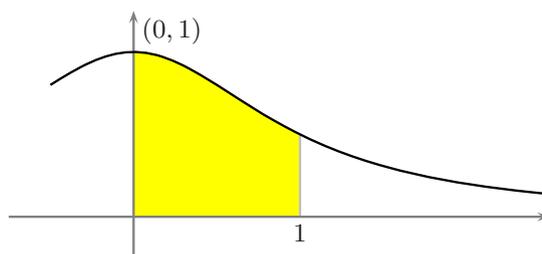
La funzione integranda è la ben nota **versiera** di Gaetana Agnesi: il suo dominio è  $\mathbb{R}$  e, in tale dominio  $f$  è una funzione simmetrica pari in quanto vale l'identità

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il segno è sempre positivo essendo  $1 + x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .  $f$  è pure continua in  $\mathbb{R}$  e i suoi limiti all'infinito sono  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ . Dato che per  $x \geq 0$  è

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

la funzione è ivi decrescente e presenta un massimo assoluto in  $x = 0$ . Nella figura 1 appare il grafico di  $f$  con evidenziato il trapezoide di cui si cerca una stima numerica per l'area  $\mathcal{A}$ .



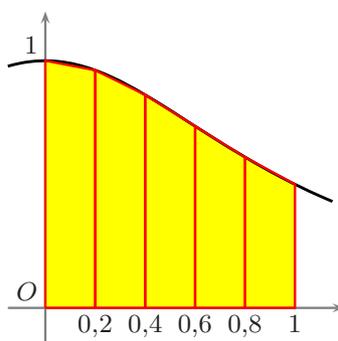
**Fig. 1.** Grafico della funzione  $y = 1/(1+x^2)$  e trapezoide.

Scelto  $n = 5$  (fig. 2) l'ampiezza di ciascun intervallino è  $h = (1 - 0)/5 = 0,2$  e possiamo partizionare l'intervallo  $[0, 1]$  con i punti di ascissa

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,2 \quad x_2 = 0,4 \quad x_3 = 0,6 \quad x_4 = 0,8 \quad x_5 = 1$$

e quindi impostare la somma (2) come

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{0,2}{2} \cdot \sum_{i=0}^4 \{f[0,2(i+1)+0] + f(0,2i+0)\} \\ &= 0,1 \sum_{i=0}^4 \{f[0,2(i+1)] + f(0,2i)\}. \end{aligned}$$



**Fig. 2.** Suddivisione in 5 trapezi della regione di area  $\mathcal{A}$ .

Più esplicitamente si ha

$$\mathcal{A} = 0,1\{[f(0,2) + f(0)] + [f(0,4) + f(0,2)] + [f(0,6) + f(0,4)] \\ + [f(0,8) + f(0,6)] + [f(1) + f(0,8)]\}$$

per cui calcolando i corrispondenti valori della funzione  $f$  otteniamo

$$\mathcal{A} = 0,1\{[0,961538 + 1] + [0,862069 + 0,961538] + [0,735294 + 0,862069] \\ + [0,609756 + 0,735294] + [0,5 + 0,609756]\} \\ \approx 0,783732.$$

Con tale approssimazione del valore dell'integrale a secondo membro della (1) la stima di  $\pi$  risulta

$$\frac{\pi}{4} = \mathcal{A} \approx 0,783732 \quad \implies \quad \pi \approx 4 \cdot 0,783732 = 3,13493$$

valore che differisce per meno di un centesimo da  $\pi$  ( $\pi - 3,13493 = 0,0067$ ). Ulteriori calcoli, ottenuti con un programma che usa tale metodo, forniscono in funzione di  $n$ , le stime seguenti di  $\pi$

$n$ :	5	10	20	50	100
$\pi$ :	3,13493	3,13993	3,14118	3,14153	3,14158.

# ESAME 2007

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

1) Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\widehat{CAB}$  si mantenga doppio dell'angolo  $\widehat{ABC}$ .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ABC}$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se  $\widehat{ABC} = 36^\circ$  allora è  $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

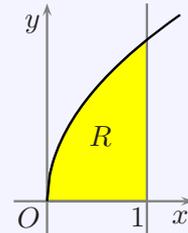
2) Si consideri un cerchio  $C$  di raggio  $r$ .

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in  $C$  si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con  $S_n$  l'area del poligono regolare di  $n$  lati inscritto in  $C$ . Si dimostri che  $S_n = \frac{n}{2}r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$  e si trovi un'analogia espressione per l'area del poligono regolare di  $n$  lati circoscritto a  $C$ .
3. Si calcoli il limite di  $S_n$  per  $n \rightarrow \infty$ .
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

**Questionario**

1. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 2\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 1$  (in figura) è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .



Soluzione

2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Soluzione

3. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione  $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$ .

Soluzione

4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

Soluzione

5. Si mostri che la funzione  $y = x^3 + 8$  soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo  $[-2, 2]$ . Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

Soluzione

6. Si sa che il prezzo  $p$  di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni.

Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

Soluzione

7. Se  $f(x)$  è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo  $[-2, 2]$ , che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?

Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione  $3 + f(x)$ ?

Soluzione

8. Si risolva l'equazione:  $4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$ .

Soluzione

9. Si calcoli l'integrale indefinito  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  e, successivamente, si verifichi che il risultato di  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  è in accordo con il suo significato geometrico.

Soluzione

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

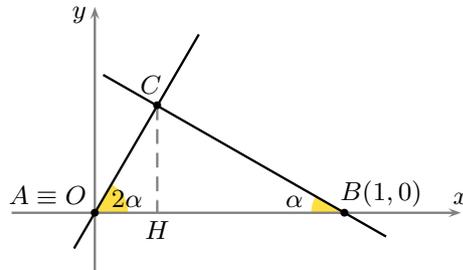
Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Scegliamo un sistema di assi cartesiani dove il vertice  $A$  coincida con l'origine  $O$ , il vertice  $B$  appartenga all'asse delle  $x$  con coordinate  $B(1, 0)$  mentre il terzo vertice  $C$  sarà individuato dalla coppia  $C(x, y)$ . Posto inoltre  $\angle ABC = \alpha$  con  $\alpha \geq 0$  dev'essere pure soddisfatta la condizione  $\angle CAB = 2\angle ABC = 2\alpha$  (fig. 1). Poiché la misura dell'ampiezza di ciascuno dei tre angoli di  $\triangle ABC$  dev'essere un numero positivo (o, nei casi degeneri, nulla) nonché la loro somma deve valere  $\pi$ , segue che

$$\angle ACB = \pi - (\angle ABC + \angle CAB) = \pi - (\alpha + 2\alpha) \geq 0$$

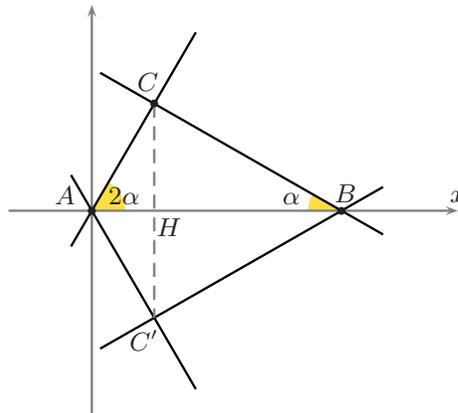
per cui  $\pi - 3\alpha \geq 0$  ossia  $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ . La misura  $\alpha$  dovrà pertanto soddisfare le limitazioni  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$  e nel caso assuma i valori estremi di tale intervallo il triangolo



**Fig. 1.** Sistema cartesiano associato al triangolo  $ABC$ .

risulterà degenere.

Notata la simmetria del problema rispetto all'asse delle  $x$  (fig. 2) in quanto ad ogni punto  $C(x, y)$  del semipiano delle ordinate positive o nulle ( $y \geq 0$ ) che soddisfa alla condizione  $\angle CAB = 2\angle ABC$  se ne può individuare un secondo  $C'(x, -y)$  con ordinata opposta,



**Fig. 2.** Simmetria del problema rispetto all'asse  $x$ .

supporremo inizialmente che l'ordinata di  $C$  sia  $y \geq 0$ . Detto poi  $H$  il punto proiezione ortogonale di  $C$  sull'asse delle  $x$ , per definizione di tangente trigonometrica si ha

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{HC}{AH},$$

per cui, notato che  $HC = y$  e  $AH = x$ , è anche

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = x \operatorname{tg} 2\alpha,$$

equazione quest'ultima che rappresenta l'equazione cartesiana della retta  $AC$ . Tale retta si poteva ottenere ricordando pure il significato goniometrico di coefficiente angolare ossia come la tangente dell'angolo che la retta definisce con l'asse

delle ascisse. Nell'unico caso in cui la precedente relazione perde di significato ossia quando  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  si ha  $x = 0$  per cui  $C$  appartiene all'asse  $y$  e il  $\triangle ABC$  si riduce ad un triangolo rettangolo isoscele ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ). L'ordinata di  $C$  è in tal caso  $y = 1$ .

Ricordato che  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  ne segue che  $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{3}$  per cui, ancora considerando il significato trigonometrico di tangente di un angolo e in riferimento a  $\triangle HBC$  rettangolo in  $H$ , possiamo scrivere

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{HC}{HB} = \frac{y}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad y = (1-x) \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

che appare l'equazione della retta  $BC$ . Avendo poi posto  $y \geq 0$  dev'essere anche  $1-x > 0$  cioè  $x < 1$ .

Il punto  $C$  è quindi individuato dall'intersezione delle precedenti due rette

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg} 2\alpha & (2) \\ y = -x \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha & (3) \\ x < 1 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

che ne esprimono il luogo  $\gamma$  in termini del parametro  $\alpha$ .

Per ottenere quanto richiesto ossia l'equazione (implicita) di  $\gamma$ , va eliminato nel sistema precedente il parametro  $\alpha$ . Osservato che dalla (1) la  $\operatorname{tg} \alpha$  è già data in termini di  $x$  e  $y$ , converrà esprimere la  $\operatorname{tg} 2\alpha$  della (2) in funzione di  $\operatorname{tg} \alpha$  e quindi eliminare tra (2) e (3) tale termine. Pertanto sfruttando l'identità

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

si ha

$$y = x \operatorname{tg} 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad y = x \left( \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

e, sostituendo la

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x}$$

si ottiene

$$y = x \cdot 2 \left( \frac{y}{1-x} \right) : \left[ 1 - \frac{y^2}{(1-x)^2} \right].$$

Sviluppato il quadrato ed eseguito il minimo comune multiplo entro parentesi quadre

$$y = \frac{2xy}{1-x} : \left[ \frac{1+x^2-2x-y^2}{(1-x)^2} \right] \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2xy}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2-2x-y^2}$$

l'espressione si può semplificare nella

$$y = \frac{2xy \cdot (1-x)}{1+x^2-2x-y^2}$$

e quindi, moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore, si giunge

$$y(1+x^2-2x-y^2) = 2xy(1-x)$$

o anche

$$y[1+x^2-2x-y^2-2x+2x^2] = 0 \implies y(3x^2-4x+1-y^2) = 0.$$

Quest'ultima equazione possiede la soluzione  $y = 0$  (e  $x \in \mathbb{R}$ ) che implica  $\alpha = 0$  e, geometricamente, afferma l'appartenenza di  $C$  all'asse delle  $x$ . Manifestamente è una situazione geometrica degenera in quanto  $\triangle ABC$  si riduce ad un segmento. D'altra parte può essere anche

$$3x^2 - 4x + 1 - y^2 = 0$$

da cui

$$y^2 = 3x^2 - 4x + 1. \quad (4)$$

Affinché quest'ultima abbia soluzioni dev'essere

$$3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{cases}$$

per cui  $x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1$ . Per la condizione di positività collegata alla  $\text{tg } \alpha$  e tradotta precedentemente in  $x < 1$  (sistema (2)), abbiamo che la forma esplicita per il luogo  $\gamma$  (di ordinate positive) risulta in definitiva

$$\gamma : \begin{cases} y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ x \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

La forma implicita che rappresenta il luogo  $\gamma$  è invece data dalla (4) con aggiunta la condizione appena ricavata e che riscriviamo come

$$\gamma : \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (6)$$

Questa forma rientra nella classe delle equazioni di II grado in due incognite

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

equazioni rappresentative, tranne i casi degeneri, delle curve coniche.

2. Nel caso siano noti gli elementi essenziali della teoria delle equazioni di II grado in due variabili (in caso contrario si veda più **avanti**) e cioè come il segno della quantità  $\Delta = b^2 - 4ac$  (detta *discriminante della conica*) permetta di individuare il tipo di conica tra parabola, ellisse ed iperbole secondo lo schema seguente

$$\begin{aligned} \Delta < 0 & \text{ l'equazione rappresenta un'ellisse o una circonferenza,} \\ \Delta = 0 & \text{ l'equazione rappresenta una parabola,} \\ \Delta > 0 & \text{ l'equazione rappresenta un'iperbole,} \end{aligned}$$

segue immediatamente che l'equazione (6) rappresenta un'iperbole in quanto il suo discriminante risulta  $\Delta = 0 - 4(3)(-1) = 12 > 0$ . Se poi *completiamo il quadrato* ossia riscriviamo identicamente l'espressione di II grado come

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a},$$

l'equazione (6) diviene

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - y^2 = -1 \quad 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$$

da cui

$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1.$$

Posto

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2}{3} \\ y' = y \end{cases} \quad (7)$$

si giunge all'equazione  $9(x')^2 - 3(y')^2 = 1$  che, ridotta alla forma canonica

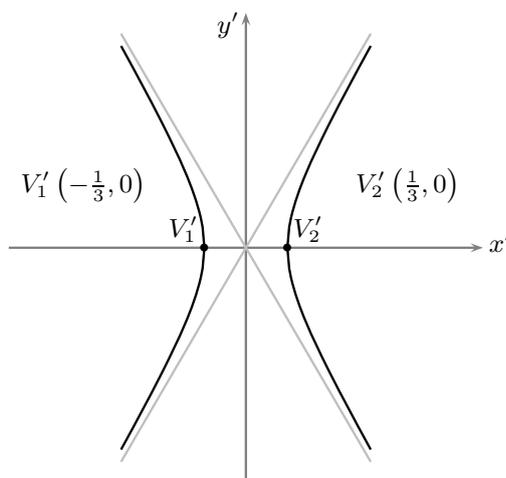
$$\gamma' : \frac{(x')^2}{1/9} - \frac{(y')^2}{1/3} = 1, \quad (8)$$

permette di riconoscere un'iperbole centrata  $\gamma'$  con vertici  $V'_1$  e  $V'_2$  sull'asse delle  $x$  (che è quindi l'asse focale)

$$V'_1 \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \quad V'_2 \left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

Le lunghezze dei semiassi sono

$$a^2 = \frac{1}{9} \implies a = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{1}{3} \implies b = \frac{1}{\sqrt{3}},$$



**Fig. 3.** Grafico dell'iperbole traslata  $\gamma'$  e suoi asintoti.

da cui le equazioni degli asintoti

$$y' = \pm \left( \frac{1/\sqrt{3}}{1/3} \right) x' = \pm \sqrt{3} x'.$$

Il grafico di tale iperbole e relativi asintoti è rappresentato nella fig. 3.

Poiché la trasformazione (7) rappresenta una traslazione possiamo dedurre il grafico di  $\gamma$  eseguendo la traslazione inversa che, per le ascisse, si riduce a  $x = x' + \frac{2}{3}$  e quindi è rappresentata dal vettore  $\vec{t}$  di componenti  $\vec{t} = (\frac{2}{3}, 0)$ . Si tratta perciò di traslare di  $\frac{2}{3}$  nel verso positivo dell'asse  $x$  l'iperbole  $\gamma'$ . Pertanto l'ascissa del vertice  $V_1$  assume il valore di  $\frac{1}{3}$  e, data la condizione (6) sulle ascisse collegata alle condizioni geometriche iniziali, solo il ramo sinistro dell'iperbole potrà descrivere il luogo  $\gamma$ . Le equazioni dei due asintoti divengono

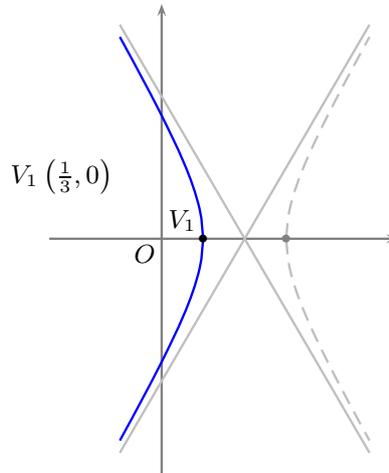
$$y' = \pm \sqrt{3} x' \quad \Longrightarrow \quad y = \pm \sqrt{3} \left( x - \frac{2}{3} \right)$$

cosicché il luogo richiesto possiede il grafico di fig. 4.

• Nel caso invece non sia nota la teoria sulle equazioni di II grado in due incognite si dovrà studiare la funzione data dalle (5)

$$\begin{cases} y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

e, al termine, considerare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ . Il segno di tale funzione risulta evidentemente positivo se  $x < \frac{1}{3}$  mentre è nullo in corrispondenza di  $x = \frac{1}{3}$ .



**Fig. 4.** Grafico del luogo  $\gamma$  e suoi asintoti.

Lo studio del limite all'infinito implica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left( 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

per cui estratto il fattore  $x^2$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}.$$

Tale risultato permette l'esistenza di un eventuale asintoto per cui va ancora risolto il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

che, per quanto sopra, conduce ad un coefficiente angolare  $m = -\sqrt{3}$ . Il termine noto  $q$  discende dal limite

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} - (-\sqrt{3}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x.$$

L'indeterminazione cui conduce quest'ultima espressione si riduce razionalizzando il numeratore ossia

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\dots} + \sqrt{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x}{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1 - 3x^2}{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x}.\end{aligned}$$

Ridotti i termini simili ed estratto il fattore  $-x$  dalla radice si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{-x\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(4 - 1/x)}{-x\left(\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4 - 1/x)}{\left(\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

La funzione quindi presenta l'asintoto di equazione  $r : y_a = -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$ . La posizione della funzione rispetto ad  $r$  si studia risolvendo la disequazione  $y > y_a$ ,

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} > -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3x^2 - 4x + 1} > \frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}$$

che equivale alla

$$3x^2 - 4x + 1 > \left(\frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \text{essendo} \quad x \leq \frac{1}{3}.$$

Da quest'ultima discende subito

$$3x^2 - 4x + 1 > 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad 1 > \frac{4}{3}$$

che non possiede soluzioni: pertanto  $y < y_a \quad \forall x \leq \frac{1}{3}$ .

Il calcolo fornisce la derivata prima seguente

$$y' = \frac{6x - 4}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} = \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$$

e questa risulta positiva se  $3x - 2 > 0$  cioè se  $x > \frac{2}{3}$ . Essendo  $x \leq \frac{1}{3}$  risulta in tale intervallo illimitato  $y' < 0$  e la funzione  $y$  è perciò monotona decrescente.

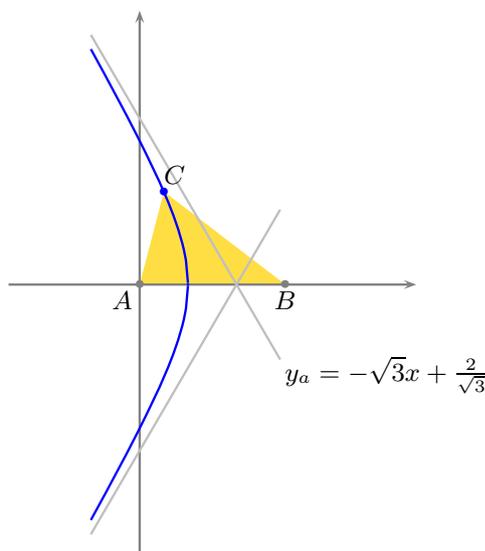
Lo studio della derivata seconda informa su come sono disposte le concavità e convessità della funzione. Si ha

$$\begin{aligned} y'' &= D \left[ \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} \right] = D \left[ \frac{3x - 2}{\sqrt{\dots}} \right] \\ &= \left( 3\sqrt{\dots} - (3x - 2) \cdot \frac{3x - 2}{\sqrt{\dots}} \right) / (3x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

ed eseguendo il minimo comune multiplo ci si riduce alla

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{3(3x^2 - 4x + 1) - (3x - 2)^2}{(3x^2 - 4x + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{-1}{(3x^2 - 4x + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Poiché l'ultima espressione è certamente negativa per  $x \leq \frac{1}{3}$  la concavità è rivolta verso il basso. In definitiva, tenendo conto della simmetria, il grafico appare identico a quello già **discusso** e lo si ripropone di seguito (fig. 5) mettendone in evidenza pure il triangolo che lo origina a livello geometrico.



**Fig. 5.** Grafico del luogo  $\gamma$  e triangolo  $ABC$ .

3. La richiesta del quesito suggerisce implicitamente di abbandonare il sistema cartesiano e considerare l'angolo  $\alpha = \angle ABC$  come la variabile in termini della quale esprimere la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$ .

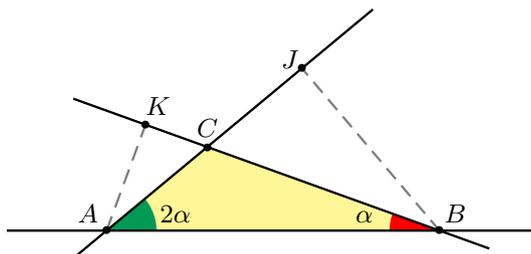


Fig. 6. Triangolo  $ABC$  ed altezze.

Detti  $J$  e  $K$  i piedi delle altezze relative al lato  $AC$  e rispettivamente  $BC$  (fig. 6), la funzione di cui cercare il massimo è

$$s = \overline{BJ}^2 + \overline{AK}^2.$$

Essendo i due triangoli  $ABJ$  e  $ABK$ , rettangoli con ipotenusa  $\overline{AB} = 1$ , è immediato dedurre che

$$\overline{AK} = \overline{AB} \sin \angle ABK = 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \quad \overline{BJ} = \overline{AB} \sin \angle BAJ = \sin 2\alpha.$$

Pertanto la funzione  $s$  che si ottiene è

$$\begin{cases} s = \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

dove si sono aggiunte le condizioni sull'angolo  $\alpha$ .

La sua derivata prima risulta

$$s' = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha (4 \cos 2\alpha + 1)$$

e lo studio del segno  $s' \geq 0$  coinvolge due fattori, il primo dei quali risulta positivo o nullo,  $\sin 2\alpha \geq 0$ , per  $0 \leq 2\alpha \leq \pi$  ossia  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Per l'altro si ha

$$4 \cos 2\alpha + 1 \geq 0 \quad \cos 2\alpha \geq -\frac{1}{4} \tag{9}$$

e quindi definito l'angolo  $2\beta$  tramite

$$\cos 2\beta = -\frac{1}{4} \quad \text{ossia} \quad 2\beta = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right),$$

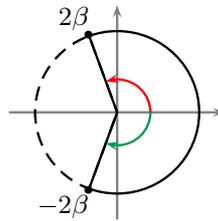


Fig. 7.

angolo che approssimativamente vale

$$\beta = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 52,238^\circ = 52^\circ 14' 20'',$$

le soluzioni della (9) sono rappresentate graficamente dalla figura 7 coinvolgente la circonferenza goniometrica. Formalmente è l'insieme  $-2\beta + 2k\pi \leq 2\alpha \leq 2\beta + 2k\pi$  ossia  $-\beta + k\pi \leq \alpha \leq \beta + k\pi$ .

Restringendo lo studio in  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  e associando pure l'esito dello studio del segno del primo fattore (fig. 8) si riconosce dal segno complessivo di  $s'$  che il massimo è raggiunto quando  $\alpha = \beta = 52^\circ 14' 20''$ .

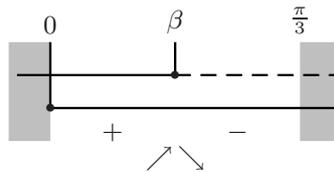


Fig. 8.

4. Se  $\angle ABC = 36^\circ$  segue che  $\angle CAB = 2\angle ABC = 72^\circ$  e  $\angle BCA = 180^\circ - 3(36^\circ) = 72^\circ$  per cui il triangolo  $\triangle ABC$  è isoscele sulla base  $AC$  e il lato  $AC$  è pure il lato di un decagono regolare di apotema unitaria (si veda pure il quesito n. 1 dell'Esame 2005).

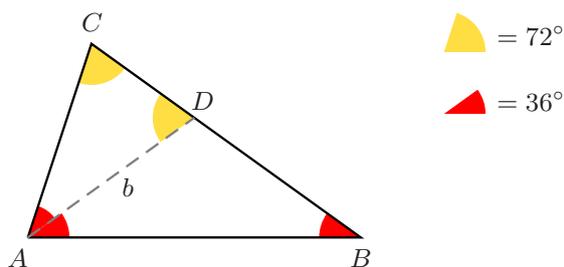


Fig. 9.

Tracciata la bisettrice  $b$  di  $\angle A$  (fig. 9) sia  $\{D\} = b \cap BC$  per cui  $\triangle CAD$  possiede l'angolo in  $A$  di  $36^\circ$  e, per differenza,  $\angle ADC = 72^\circ$ . Ne segue che  $\overline{AD} = \overline{AC}$  e, per il III criterio,  $\triangle CAD$  è simile con  $\triangle ABC$ . D'altra parte pure  $\triangle ABD$  è isoscele avendo le ampiezze degli angoli adiacenti il lato  $AB$  uguali a  $36^\circ$  e quindi  $\overline{AD} = \overline{BD}$ . Pertanto da  $\triangle ABC \sim \triangle CAD$  segue la proporzione

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$$

che, per quanto detto,  $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BD} = x$  e  $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = 1 - x$ , riscriviamo come

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Moltiplicando per  $x$  si ha  $x^2 = 1 - x$  cioè  $x^2 + x - 1 = 0$ . Quest'ultima equazione possiede le soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

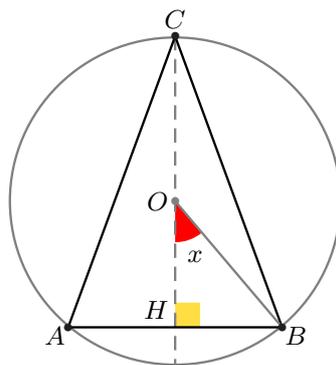
e l'unica accettabile risulta

$$x_1 = \overline{AC} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

che coincide con quanto si voleva dimostrare. Infine, poiché il valore ottenuto rappresenta la sezione aurea dell'unità ( $\overline{BC} = 1$ ), possiamo aggiungere l'osservazione di geometria elementare che vede il lato  $AC$  di un decagono regolare come la sezione aurea di  $BC$  cioè del raggio del cerchio circoscritto a tale poligono regolare.\*

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

Tracciata l'altezza  $CH$  relativa alla base  $AB$  del triangolo isoscele  $ABC$  inscritto nel cerchio  $\mathcal{C}$  di centro  $O$  e raggio  $r$  (fig. 1), poniamo  $x = \angle HOB$  con  $0 \leq x \leq \pi$ .



**Fig. 1.** Triangolo isoscele inscritto in un cerchio.

\* Per ulteriori approfondimenti si veda la pagina web  
<http://www.lorenzoroi.net/geometria/Poligoni.html>

Considerando il triangolo rettangolo  $OHB$  di ipotenusa  $\overline{OB} = r$ , risulta facilmente che la misura (con segno) del cateto  $OH$  è

$$OH = \overline{OB} \cos \angle HOB = r \cos x,$$

potendo  $OH$  assumere valori anche negativi nell'intervallo  $[-r, r]$ , mentre  $\overline{HB}$  è pari a  $\overline{HB} = \overline{OB} \sin \angle HOB = r \sin x$ . Ne segue che  $\overline{CH} = \overline{CO} + OH = r + r \cos x$  e tale relazione rimane valida pure quando l'ampiezza dell'angolo  $x$  assume valori maggiori di  $\pi/2$ . L'area di  $\triangle ABC$  è perciò rappresentata dalla funzione

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \overline{HB} \cdot \overline{CH} = r \sin x (r + r \cos x)$$

ossia, con le restrizioni geometriche (poniamo per brevità  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\triangle ABC)$ )

$$\begin{cases} \mathcal{A} = r^2(\sin x + \sin x \cos x) \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

La derivata di quest'ultima espressione è

$$\mathcal{A}' = r^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = r^2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$$

dove si è utilizzata l'identità goniometrica  $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ . Lo studio del segno di  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}' \geq 0$ , implica la risoluzione della disequazione  $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$  che, posto  $t = \cos x$ , si riduce alla

$$t^2 + t - 1 \geq 0 \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad t \leq -1 \vee t \geq \frac{1}{2}.$$

La disequazione elementare  $\cos x \leq -1$  possiede come soluzioni  $x = \pi + 2k\pi$  mentre le soluzioni di  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ , notato che  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , sono rappresentate graficamente dalla fig. 2 e formalmente dalle

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

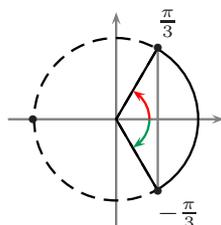


Fig. 2.

Nell'intervallo  $[0, \pi]$  il segno di  $\mathcal{A}'$  è quindi sintetizzato graficamente dalla figura 3 che mette in evidenza un massimo in corrispondenza dell'angolo  $x_{max} = \frac{\pi}{3}$ .

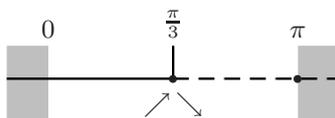


Fig. 3.

In tal caso  $\triangle ABC$  si riduce ad un triangolo equilatero come d'altra parte ci si poteva aspettare essendo questo un classico problema di max-min.

2. Se  $\mathcal{P}_n$  è il poligono regolare di  $n$  lati inscritto nel cerchio  $\mathcal{C}$  e  $O$  è il suo centro, sia  $\triangle AOB$  il triangolo isoscele avente per base un lato  $AB$  del poligono (fig. 4). L'ampiezza dell'angolo al vertice di  $\triangle AOB$  è evidentemente  $\angle AOB = 2\pi/n$ .

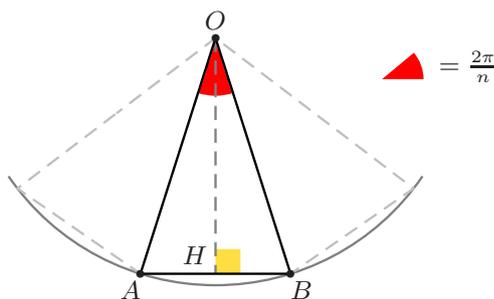


Fig. 4. Triangolo di un poligono regolare inscritto in  $\mathcal{C}$ .

Essendo  $\overline{AO} = \overline{OB} = r$  e detto  $H$  il piede dell'altezza alla base  $AB$  si ha

$$\begin{aligned} \overline{HB} &= \overline{OB} \operatorname{sen}\left(\frac{\angle AOB}{2}\right) \\ &= r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} / 2\right) \\ &= r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\overline{OH} = \overline{OB} \cos\left(\frac{\angle AOB}{2}\right) = r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

e quindi l'area di  $\triangle AOB$  è

$$\mathcal{A}(\triangle AOB) = \overline{HB} \cdot \overline{OH} = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Essendo il poligono  $\mathcal{P}_n$  formato da  $n$  triangoli congruenti (ed equivalenti) a quello appena discusso, l'area complessiva  $\mathcal{S}_n$  di  $\mathcal{P}_n$  è

$$\mathcal{S}_n = n \cdot \mathcal{A}(\triangle AOB) = n \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

avendo sfruttato l'identità goniometrica  $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$ . L'espressione trovata coincide con quella richiesta dal quesito.

Per il poligono regolare circoscritto  $\mathcal{P}'_n$  (fig. 5) l'apotema è  $\overline{OE} = r$  con  $E$  piede dell'altezza relativa alla base  $CD$ : risulta inoltre ancora  $\angle COD = 2\pi/n$ .

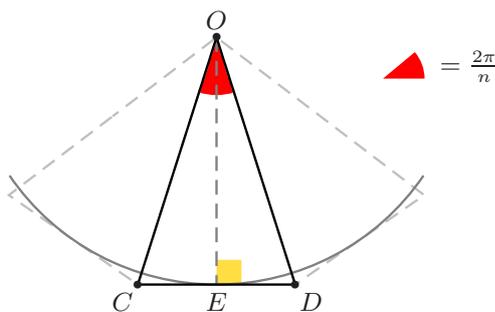


Fig. 5. Triangolo di un poligono regolare circoscritto a  $C$ .

Per la definizione di tangente goniometrica ne deriva che

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{OE}} = \operatorname{tg} \angle DOE = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \angle COD \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{n} \right).$$

Segue che  $\overline{ED} = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$  per cui

$$\mathcal{A}(\triangle COD) = \overline{OE} \cdot \overline{ED} = r \cdot r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

e l'area complessiva  $\mathcal{S}'_n$  del poligono circoscritto è, in definitiva,  $\mathcal{P}'_n$

$$\mathcal{S}'_n = n \cdot \mathcal{A}(\triangle COD) = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

3. Si chiede di calcolare il seguente limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} \left( n \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Posto  $x = \frac{2\pi}{n}$  e osservato che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 0$ , il limite richiesto si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{x} \cdot \operatorname{sen} x = \lim_{x \rightarrow 0} \pi r^2 \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right).$$

Sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

se l'angolo  $x$  è espresso in radianti come è in tal caso, si giunge infine alla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

che costituisce, come aspettato, l'area del cerchio  $\mathcal{C}$ .

4. Il problema storico della quadratura del cerchio consiste nella costruzione di un quadrato, per esempio di lato  $l$ , che abbia un'area pari a quella del cerchio ossia

$$l \cdot l = \pi r^2 \quad l^2 = \pi r^2.$$

Evidentemente a livello algebrico dev'essere  $l = r\sqrt{\pi}$  ma, va ribadito, la costruzione del quadrato dev'essere realizzata tramite riga e compasso gli unici strumenti ammessi nell'ambito della geometria euclidea. Il problema è inoltre equivalente a quello della rettificazione della circonferenza che consiste nel determinare con riga e compasso un segmento congruente con la lunghezza della circonferenza ( $l = 2\pi r$ ).

Nel 1882 F. Lindemann ha dimostrato che tali problemi (che trovano origine nella geometria greca) non sono risolubili ossia è impossibile costruire con strumenti euclidei (riga e compasso) un quadrato che abbia la stessa area del cerchio. In termini algebrici ciò equivale ad affermare che  $\pi$ , o anche  $\sqrt{\pi}$ , non sono esprimibili tramite radicali ossia non possono essere soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti razionali: sono cioè dei numeri reali trascendenti.

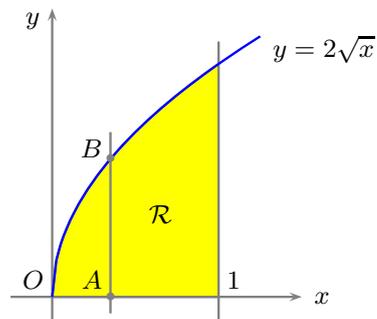
#### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione  $y = 2\sqrt{x}$  rappresenta l'arco di parabola  $p$  descritto pure dal sistema misto

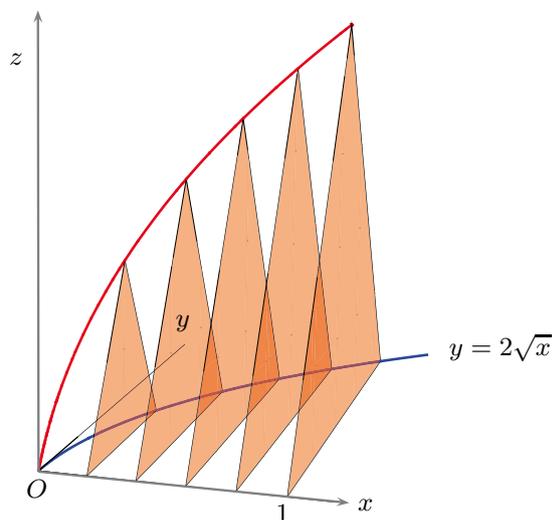
$$p : \begin{cases} x = \frac{1}{4}y^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

ottenuto quadrando l'equazione assegnata e ponendo le necessarie condizioni di esistenza ( $x \geq 0$ ) e positività ( $y \geq 0$ ). Il grafico corrispondente è riportato in fig. 1.

Del solido  $\mathcal{S}$  vengono proposte in prospettiva alcune sue sezioni (fig. 2) con evidenziato in blu l'arco di parabola  $p$  e in rosso il luogo dei vertici non appartenenti al piano  $Oxy$  dei triangoli equilateri sezioni di  $\mathcal{S}$ .



**Fig. 1.** Arco di parabola  $p$  e regione  $R$ .



**Fig. 2.** Cinque sezioni equilateri del solido  $S$ .

Il volume di un solido  $S$  del quale sia possibile esprimere l'area delle sue sezioni parallele in funzione di una variabile  $x$  è dato dall'integrale

$$V = \int_a^b \mathcal{A}(x) \cdot dx$$

dove  $\mathcal{A}(x)$  rappresenta l'area della sezione del solido ottenuta tagliando  $S$  nel punto di ascissa  $x$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , mentre  $a$  e  $b$  sono gli estremi rispettivamente inferiore e superiore di variabilità di  $x$ : la funzione  $\mathcal{A}(x)$  è supposta nota e continua nell'intervallo  $[a, b]$ .

Nel caso in esame le sezioni sono costituite da triangoli equilateri aventi la base di estremi  $A(x, 0)$  e  $B(x, 2\sqrt{x})$  (fig. 1) e quindi la misura del lato in termini di  $x$

è  $l = 2\sqrt{x}$ . Poiché l'area di un triangolo equilatero di lato  $l$  è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2,$$

il volume di  $\mathcal{S}$  si calcola con l'integrale definito

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2 \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4x \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx$$

avendo sostituito ad  $l$  la sua espressione in termini della variabile  $x$ . Poiché  $\int x \, dx = x^2/2$ , il risultato discende immediato

$$\mathcal{V} = \sqrt{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Siano  $a = 40$  cm,  $b = 60$  cm e  $c = 80$  cm le misure delle lunghezze dei tre lati di un triangolo. Poiché il teorema di Carnot (o del coseno) collega tali lunghezze ad un angolo del triangolo tramite la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

e le analoghe per  $b$  e  $c$ , non resta che applicare tale teorema isolando a primo membro il coseno. Ne segue

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{60^2 + 80^2 - 40^2}{2 \cdot 60 \cdot 80} = \frac{7}{8}$$

da cui  $\alpha = \arccos \frac{7}{8} \approx 28,9550^\circ = 28^\circ 57' 18''$ .

Allo stesso modo

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{40^2 + 80^2 - 60^2}{2 \cdot 40 \cdot 80} = \frac{11}{16}$$

da cui

$$\beta = \arccos \frac{11}{16} \approx 46,5675^\circ = 46^\circ 34' 3''$$

e infine,

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{40^2 + 60^2 - 80^2}{2 \cdot 40 \cdot 60} = -\frac{1}{4}$$

da cui

$$\gamma = \arccos \left( -\frac{1}{4} \right) \approx 104,4775^\circ = 104^\circ 28' 39''.$$

Ovviamente risulta  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Riscritta l'equazione  $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$  come  $x^3 - x^2 + 1 = k$ , la ricerca del numero delle sue soluzioni al variare del parametro  $k$  cioè la sua *discussione*, equivale alla ricerca delle intersezioni tra le curve di equazione

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 + 1 \\ y = k, \end{cases}$$

la prima rappresentativa di una parabola cubica, la seconda di un fascio di rette orizzontali.

Notato che

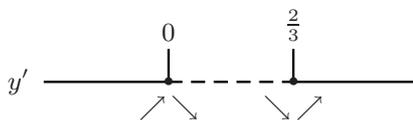
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1,$$

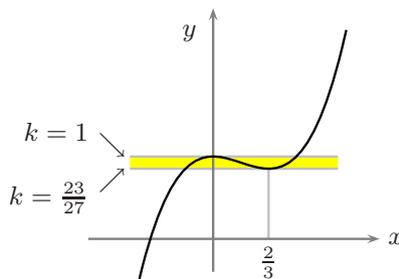
e che la derivata prima  $y' = 3x^2 - 2x \geq 0$  risulta positiva o nulla per  $x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$ , ne segue che la cubica possiede un massimo in  $x = 0$  (fig. 1) del valore  $y(0) = 1$  ed un minimo in corrispondenza di  $x = \frac{2}{3}$  che vale

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{8 - 12 + 27}{27} = \frac{23}{27}.$$



**Fig. 1.**

Con queste informazioni possiamo tracciare un grafico approssimativo (fig. 2) ma che ci permette di riconoscere il numero delle soluzioni.



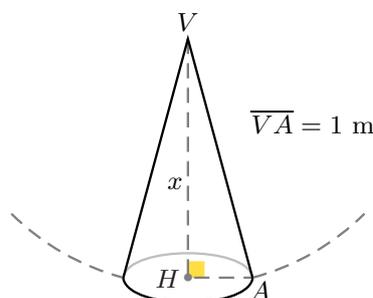
**Fig. 2.** Grafico della cubica  $y = x^3 - x^2 + 1$ .

Il fascio di equazione  $y = k$  interseca quindi la cubica in un solo punto (e quindi avremo una sola soluzione) per  $k < \frac{23}{27} \vee k > 1$  mentre vi sono 3 soluzioni per  $\frac{23}{27} \leq k \leq 1$ : di queste ultime, due coincidono se  $k$  assume i valori estremi  $k = 1$  o  $k = \frac{23}{27}$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

In riferimento alla figura 1, sia  $V$  il vertice del cono,  $H$  il piede dell'altezza e  $A$  un punto qualsiasi della circonferenza di base. Dato che l'apotema è unitaria,  $\overline{VA} = 1$  m, posto  $x = \overline{VH}$  con  $0 \leq x \leq 1$ , la misura del raggio di base  $\overline{AH}$  si esprime per mezzo del teorema di Pitagora,

$$r^2 = \overline{AH}^2 = \overline{VA}^2 - \overline{VH}^2 = 1 - x^2.$$



**Fig. 1.** Cono e sue dimensioni.

Il volume  $\mathcal{V}$  risulta di conseguenza

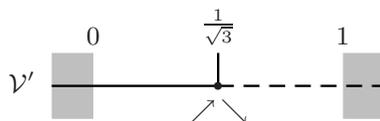
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \left( \pi \overline{AH}^2 \right) \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot x \\ &= \frac{1}{3} \pi (1 - x^2) x = \frac{\pi}{3} (x - x^3) \end{aligned}$$

con associata la condizione di origine geometrica  $0 \leq x \leq 1$ .

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\mathcal{V}' = \frac{\pi}{3} (1 - 3x^2) \quad \text{per cui da } \mathcal{V}' \geq 0 \quad \text{discende } 1 - 3x^2 \geq 0$$

e quest'ultima disequazione è risolta dai valori dell'intervallo  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . La rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{V}'$  (fig. 2) mette in evidenza la crescita della funzione in  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  e la monotonia decrescente per  $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$



**Fig. 2.**

Pertanto il volume raggiunge il suo valore massimo,  $\mathcal{V}_{max}$ , in corrispondenza del valore  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Tale valore risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{max} &= \frac{\pi}{3} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Il passaggio all'unità litri viene realizzato ricordando che

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ litri}$$

per cui

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \text{ m}^3 \approx 0,4031 \text{ m}^3 = 0,4031 \times 10^3 \text{ litri} = 403,1 \text{ litri}.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il teorema di Lagrange (o *del valor medio*), nell'ipotesi di una funzione  $f$  continua in un intervallo  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ , stabilisce l'esistenza di almeno un valore  $x_0 \in ]a, b[$  in corrispondenza del quale la derivata prima  $f'(x_0)$  assume il valore

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad x_0 \in ]a, b[.$$

La funzione  $f$  di equazione  $y = x^3 + 8$  è una funzione polinomiale di terzo grado detta anche *parabola cubica*. Poiché è noto che qualsiasi polinomio rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  derivabile un numero qualsiasi di volte, la  $f$  soddisfa alle ipotesi del teorema di Lagrange in ogni intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e quindi pure in  $[-2, 2]$ . Pertanto,  $\exists x_0 \in ]-2, 2[$  dove

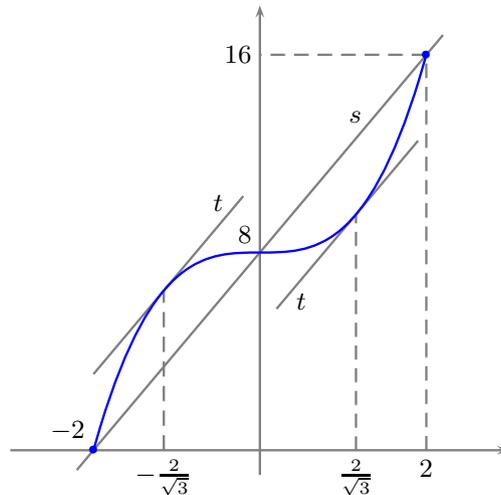
$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \quad x_0 \in ]-2, 2[.$$

Essendo  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f(2) = 16$  e  $f(-2) = 0$  risulta

$$3x_0^2 = \frac{16 - 0}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ed entrambi i valori sono accettabili in quanto interni all'intervallo  $[-2, 2]$ .

Il significato geometrico è illustrato in figura 1 dove il grafico  $G$  di  $f$  si è dedotto traslando di 8 unità nel verso positivo dell'asse  $y$  quello noto della parabola cubica



**Fig. 1.** Grafico di  $y = x^3 + 8$  e rette tangenti e secante (non isometrico).

$y = x^3$ . Appare evidente che in ciascun punto di ascissa  $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ , la retta tangente  $t$  al grafico è parallela alla retta  $s$ , secante il medesimo grafico e passante per gli estremi di  $f$  in  $[-2, 2]$  cioè in  $(-2, 0)$  e  $(2, 16)$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Supponiamo che a partire dal prezzo  $p$  vi sia stato prima un aumento e successivamente una diminuzione. Se quindi  $p$  è il prezzo iniziale, dopo l'aumento il suo prezzo  $p_1$  è

$$p_1 = p + 6\% p = p + 0,06 p = (1 + 0,06)p. \quad (1)$$

A seguito della diminuzione risulta infine

$$p_2 = p_1 - 6\% p_1 = p_1 - 0,06 p_1 = (1 - 0,06) p_1$$

e sostituendovi la (1) si ottiene

$$\begin{aligned} p_2 &= (1 - 0,06) p_1 = (1 - 0,06)(1 + 0,06)p = (1 - 0,06^2) p \\ &= (1 - 0,0036) p. \end{aligned} \quad (2)$$

In definitiva, il prezzo è diminuito dello 0,36%.

Nell'ipotesi alternativa che vi sia un'iniziale diminuzione seguita da un aumento, il prezzo dopo la diminuzione risulta

$$p'_1 = p - 6\% p = p - 0,06 p = (1 - 0,06) p. \quad (3)$$

mentre, a seguito dell'aumento, il prezzo finale sarà

$$p'_2 = p'_1 + 6\% p'_1 = p'_1 + 0,06 p'_1 = (1 + 0,06) p'_1$$

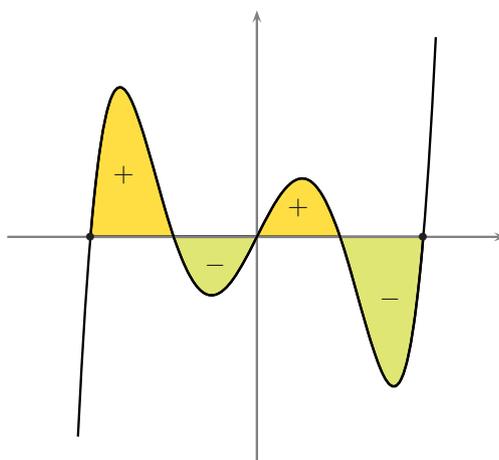
e, ancora sostituendo la (3) in quest'ultima, si giunge alla

$$\begin{aligned} p'_2 &= (1 + 0,06) p'_1 = (1 + 0,06)(1 - 0,06) p = (1 - 0,06^2) p \\ &= (1 - 0,0036) p \end{aligned}$$

Questo risultato mostra un prezzo finale identico a quello dato dalla (2) e ciò ci permette di concludere che il prezzo diminuisce leggermente (dello 0,36%) e nello stesso modo, in entrambe le ipotesi.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Se la funzione  $f$  risulta  $f(-x) = f(x) \forall x \in [-2, 2]$  e ivi definita ed integrabile, il suo integrale definito  $I$  nel medesimo intervallo dev'essere nullo in quanto, escluso il caso banale  $f(x) = 0 \forall x \in [-2, 2]$  che comporta ovviamente  $I = 0$ , a regioni trapezoidali che contribuiscono con valori positivi all'integrale definito (dove  $f(x) > 0$ , in arancione in fig. 1) corrispondono per simmetria, trapezoidi dove l'integrale definito assume valori negativi (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafico di una funzione dispari e segno di aree di trapezoidi.

Per generalità forniamo la dimostrazione ponendo  $2 = a$  cosicché si dovrà dimostrare che

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

supposta valida l'identità  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in [-a, a]$ , con  $f(x)$  integrabile.

Per la proprietà di additività dell'integrale definito possiamo suddividere  $I$  negli integrali

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

Posto  $x = -t$  per cui  $dx = -dt$ , gli estremi di integrazione risultano se  $x = -a$ ,  $t = a$  e se  $x = 0$ ,  $t = 0$ . Ne segue che il primo integrale del II membro di (1) si riscrive come

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(-t)dt$$

dove si è sfruttata la proprietà di linearità dell'integrale. Per la simmetria dispari della funzione  $f(-t) = -f(t)$  per cui il precedente integrale diviene

$$-\int_a^0 f(-t)dt = -\int_a^0 [-f(t)]dt = \int_a^0 f(t)dt.$$

Infine considerando che, per definizione,

$$\int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt,$$

l'integrale originario (1)

$$I = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x) dx = 0$$

appare la somma di due termini opposti in quanto il nome della variabile di integrazione non influisce sul valore dell'integrale: in conclusione  $I = 0$ .

Applichiamo tale proprietà al calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx.$$

Per la proprietà di additività

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx = \int_{-2}^2 3 dx + \int_{-2}^2 f(x) dx$$

ma essendo  $\int k dx = kx$  mentre, per quanto dimostrato, il secondo addendo è nullo, discende

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx = 3[x]_{-2}^2 + 0 = 3(2 + 2) = 12.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Tenendo conto della definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con } n \geq k,$$

le soluzioni della disequazione

$$4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3} \quad (1)$$

dovranno soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n-2 \geq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 5 \end{cases} \text{ risolto da } n \geq 5. \quad (2)$$

Esplicitata l'equazione (1) con la definizione di coefficiente binomiale

$$4 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} = 15 \cdot \frac{(n-2)!}{3!(n-2-3)!},$$

la proprietà del fattoriale  $n! = n \cdot (n-1)!$  permette di riscriverla come

$$4 \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4 \cdot 3!(n-4)!} = 15 \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{3!(n-5)!}.$$

Possiamo ora semplificare i fattori comuni a numeratore e denominatore ottenendo

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \frac{15}{3!} \cdot (n-2)(n-3)(n-4).$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $3!$  e riportati i termini nel primo membro

$$n(n-1)(n-2)(n-3) - 15(n-2)(n-3)(n-4) = 0,$$

si possono riconoscere dei fattori comuni

$$(n-2)(n-3)[n(n-1) - 15(n-4)] = 0,$$

per cui si giunge all'equazione

$$(n-2)(n-3)(n^2 - 16n + 60) = 0.$$

Evidentemente questa equazione ammette le soluzioni intere  $n = 2$  o  $n = 3$  ma, per quanto posto **inizialmente**, non sono valori accettabili in quanto minori di 5. Il terzo fattore si annulla invece in corrispondenza dei valori

$$n^2 - 16n + 60 = 0 \quad n_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 - 60} = \begin{cases} 10 \\ 6 \end{cases}$$

entrambi accettabili. Le soluzioni dell'equazione 1 sono pertanto  $n = 6$  oppure  $n = 10$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale indefinito

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

è collegato all'area del cerchio. Per determinarne l'insieme delle primitive eseguiamo il cambio di variabile collegato alla funzione  $x = \sin t$  il cui differenziale è  $dx = \cos t dt$ . Sostituendo questi termini, l'integrale originario si riscrive

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

ed utilizzando l'identità goniometrica fondamentale  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  si riduce a (consideriamo  $\cos t > 0$ )

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Quest'ultima forma si può ricondurre ad integrali elementari ricordando la formula di duplicazione  $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$  da cui

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

espressione quest'ultima che costituisce pure il quadrato di una formula di bisezione in quanto collega un angolo  $t$  con il suo doppio,  $2t$ . Con la sostituzione di questa identità e sfruttando la linearità dell'integrale indefinito giungiamo

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt. \end{aligned}$$

Con un'ulteriore semplice sostituzione  $w = 2t$  avente per differenziale  $dw = 2 dt$  per cui  $dt = dw/2$ , l'integrale rimasto diviene

$$\frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos w \cdot \frac{1}{2} dw = \frac{1}{4} \int \cos w dw = \frac{1}{4} \sin w$$

e l'integrale iniziale, in termini di  $t$  e  $w$  risulta

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin w + c.$$

Per giungere ad esprimerlo in termini della variabile  $x$ , dalla  $x = \sin t$  si ricava  $t = \arcsin x$  e, tenuto conto che  $\sin w = \sin 2t = 2 \sin t \cos t$ , si ha

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin 2t + c \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c. \end{aligned}$$

Osservato che  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$  si giunge infine al risultato

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + c$$

che rappresenta l'insieme delle primitive richiesto.  
L'integrale definito di una funzione positiva

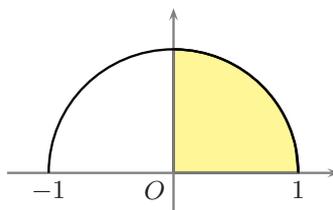
$$\int_a^b f(x) dx$$

esprime geometricamente l'area del trapezoide compreso tra il grafico di  $f(x)$ , l'asse delle  $x$  e le rette  $x = a$ ,  $x = b$ . Nel caso proposto dal quesito, poiché l'equazione  $y = \sqrt{1-x^2}$  descrive la semicirconferenza di ordinate positive con centro l'origine del sistema cartesiano e raggio unitario (quadrando, si ottiene l'equazione della circonferenza goniometrica  $x^2 + y^2 = 1$ ), ne segue che il valore dell'integrale definito

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

dovrà coincidere con l'area del quadrante di cerchio di raggio  $r = 1$  (fig. 1) e valere

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$



**Fig. 1.** Quadrante di cerchio di raggio unitario.

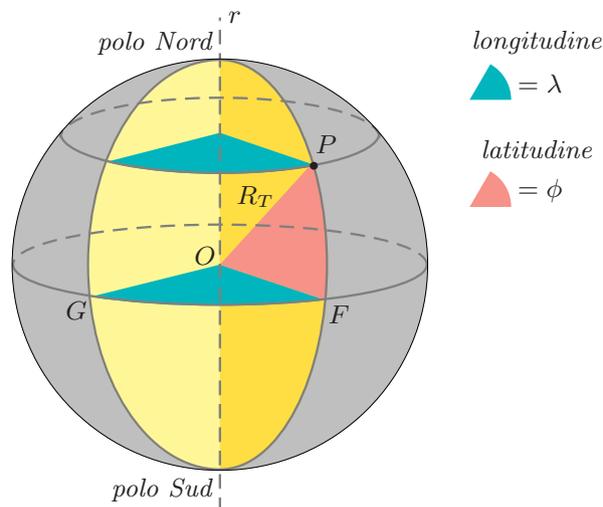
Difatti, utilizzando una delle primitive dedotte in precedenza, l'applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[ \arcsen x + x\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsen 1 + \sqrt{1-1} - \arcsen 0 - 0\sqrt{1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

che conferma quanto aspettato.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La rotazione della Terra, con periodo di 24 ore, attorno ad una retta  $r$ , l'asse terrestre, definisce una direzione privilegiata nello spazio cui riferire le disposizioni di opportuni piani rispetto alla Terra stessa. Innanzitutto l'asse terrestre interseca la superficie sferica terrestre  $S$  in due suoi punti particolari, il polo Nord e il polo Sud (fig. 1) e inoltre passa per il centro  $O$  di  $S$ .



**Fig. 1.** Terra e definizione di meridiani e paralleli.

L'intersezione della superficie terrestre con un piano passante per l'asse terrestre e per un punto  $P$  qualsiasi di  $S$ , definisce il *meridiano terrestre* che quindi risulta una circonferenza di raggio pari al raggio  $R_T$  della Terra passante per i poli. Il meridiano è suddiviso dai poli in due semicirconferenze ciascuna delle quali è detta, *meridiano geografico*. Assunto come meridiano geografico fondamentale quello passante per Greenwich, la distanza angolare tra questo e il meridiano passante per  $P$  ossia l'angolo di una sezione normale del diedro formato dai due piani

che definiscono i meridiani, rappresenta la *longitudine*  $\lambda$  di  $P$ . In riferimento alla fig. 1 risulta  $\lambda = \angle GOF$  assunto il meridiano per  $G$  come quello fondamentale. Convenzionalmente, se  $P$  si trova ad Est del meridiano fondamentale, la longitudine appartiene all'intervallo  $[0^\circ, 180^\circ]$  mentre assume valori in  $] - 180^\circ, 0[$  se ad Ovest.

L'intersezione della superficie terrestre  $S$  con un piano perpendicolare all'asse terrestre  $r$  e passante per un punto qualsiasi  $P$ , è a sua volta una circonferenza e questa definisce il *parallelo terrestre* per  $P$ . Fissato il *parallelo fondamentale* ossia l'equatore, ottenuto con l'intersezione di  $S$  con il piano perpendicolare ad  $r$  passante per il centro  $O$  della Terra, l'ampiezza dell'angolo  $\phi$  formato dalla verticale nel punto  $P$  cioè la linea  $OP$  che collega il centro della Terra con  $P$  con il piano equatoriale (fig. 1), si dice *latitudine* di  $P$ . In fig. 1,  $\phi = \angle FOP$ . Convenzionalmente tale angolo varia tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$  per punti nell'emisfero nord (o *boreale*), tra  $-90^\circ$  e  $0^\circ$  in quello sud (o *australe*).

Un punto  $P$  in tale sistema di coordinate terrestri viene in definitiva individuato dalla coppia di angoli  $(\lambda, \phi)$ .

# ESAME 2007 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

1) Sia  $a$  un numero reale maggiore di zero e sia  $g$  la funzione definita, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , da:  $g(x) = a^x + a^{-x}$ .

1. Si dimostri che, se  $a \neq 1$ ,  $g$  è strettamente crescente per  $x > 0$  e strettamente decrescente per  $x < 0$ .
2. Posto  $a = e$ , si disegni il grafico della funzione  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e si disegni altresì il grafico della funzione  $\frac{1}{f(x)}$ .
3. Si calcoli  $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$ ; successivamente, se ne trovi il limite per  $t \rightarrow \infty$  e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è  $\frac{\pi}{4}$ , si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

Soluzione

## • Problema n. 2

2) Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\widehat{CAB}$  si mantenga doppio dell'angolo  $\widehat{ABC}$ .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ABC}$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se  $\widehat{ABC} = 36^\circ$  allora è  $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione  $y = \ln x$  e l'asse  $x$ , con  $1 \leq x \leq e$ , è base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di  $S$  e se ne dia un valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .

Soluzione

3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro  $O$  fissato è un *gruppo*.

Soluzione

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e come tali parametri influenzino il grafico di  $f(x)$ .

Soluzione

5. Si consideri il teorema: «la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Soluzione

6. Si scelga a caso un punto  $P$  all'interno di un triangolo equilatero il cui lato

ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di  $P$  da ogni vertice sia maggiore di 1.

Soluzione

7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola  $y = x^2 + 1$  nel punto  $(1, 2)$ .

Soluzione

8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: « Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

Soluzione

9. Si dimostri che l'equazione  $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$  ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

Soluzione

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. La funzione proposta dal problema è

$$g(x) = a^x + a^{-x} \quad \text{con} \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

e il suo dominio è l'insieme  $\mathbb{R}$  (il caso che sia  $a = 1$  si riduce all'equazione  $y = 1$  rappresentativa di una retta parallela all'asse  $x$ ). Per dimostrare la sua

monotonia strettamente crescente per  $x > 0$  (e decrescente per  $x < 0$ ), osserviamo innanzitutto le proprietà di simmetria di tale funzione. Poiché vale l'identità

$$g(-x) = a^{-x} + a^{-(-x)} = a^{-x} + a^x = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la funzione  $g$  è una funzione pari e, in un sistema cartesiano, il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Segue che, se per  $x > 0$  è strettamente crescente dovrà, per  $x < 0$ , essere strettamente decrescente.

La dimostrazione del primo assunto si ottiene con lo studio del segno della derivata prima  $g'(x)$ ,

$$g'(x) = a^x \cdot \ln a + a^{-x} \cdot (\ln a) \cdot (-1) = \ln a (a^x - a^{-x}).$$

Da  $g'(x) > 0$  discende

$$\ln a (a^x - a^{-x}) > 0, \quad (1)$$

e le soluzioni di tale disequazione dipendono dal valore della base  $a$ . Se quindi  $a > 1$  è  $\ln a > 0$  per cui

$$a^x - a^{-x} > 0 \quad \implies \quad a^x > a^{-x}$$

e, ricordando la monotonia strettamente crescente della funzione esponenziale a base maggiore di 1, abbiamo

$$x > -x \quad \implies \quad 2x > 0 \quad \implies \quad x > 0.$$

Quindi con  $a > 1$  la funzione  $g$  è strettamente crescente in  $x > 0$ .

Nel caso  $0 < a < 1$  il primo fattore di (1) è  $\ln a < 0$  per cui l'altro dovrà essere  $a^x - a^{-x} < 0$  da cui

$$a^x < a^{-x} \quad \implies \quad x > -x \quad \implies \quad 2x > 0 \quad \implies \quad x > 0$$

e dove, nel passaggio dagli esponenziali agli esponenti, si è considerata la monotonia decrescente della funzione esponenziale di base  $a \in ]0, 1[$ . Ancora quindi per  $x > 0$  abbiamo una derivata prima positiva e quindi una funzione crescente strettamente. Per la simmetria pari di  $g$ , come detto, la funzione  $g$  dovrà essere in  $x < 0$  strettamente decrescente.

2. Posto  $a = e$  la funzione di cui studiare il grafico è ora

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tale funzione è, per quanto dimostrato nel punto precedente, simmetrica pari, crescente per  $x > 0$ , decrescente per  $x < 0$  ed essendo somma di esponenziali è, a sua volta, positiva nel dominio  $\mathbb{R}$ .

Il calcolo dei limiti agli estremi del dominio fornisce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \quad (2)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad (3)$$

e quindi per la simmetria pari è anche  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Per il risultato (2) la funzione  $f$  può presentare un asintoto: conviene pertanto risolvere l'ulteriore limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

che, manifestamente, porta ad un caso di indeterminazione del tipo  $\infty/\infty$ . Studiamo allora il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore della funzione ad argomento  $x$  e cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty,$$

in quanto valgono, ancora, i limiti (3). Esistendo il limite del rapporto delle derivate sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di De L'Hôpital e quindi possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x} = +\infty$$

dimostrando pure l'assenza di asintoti obliqui.

Il segno della derivata prima  $f'(x) = e^x - e^{-x}$  risulta

$$f'(x) \geq 0 \quad e^x - e^{-x} \geq 0 \quad \implies \quad e^x \geq e^{-x}$$

che per la monotonia si riduce a  $x \geq -x$  da cui  $x \geq 0$ . La rappresentazione grafica di tale segno (fig. 1) evidenzia la crescita/decrecenza di  $f$  che, come aspettato, possiede un minimo in corrispondenza di  $x = 0$  il cui valore è  $f(0) = 2$ .

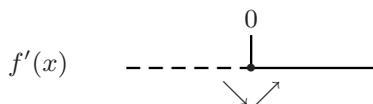
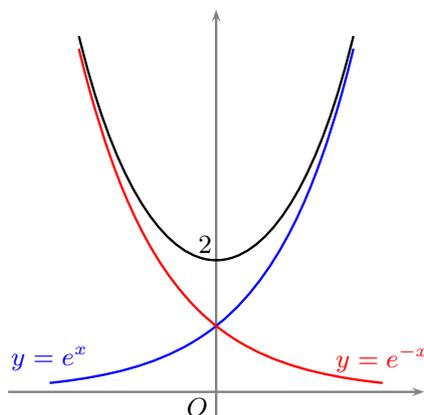


Fig. 1.

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$f''(x) = e^x - (e^{-x}) \cdot (-1) = e^x + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



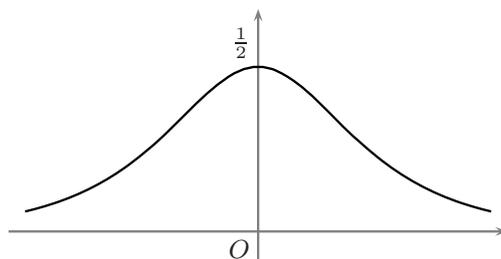
**Fig. 2.** Grafico di  $f(x) = e^x + e^{-x}$ .

cosicché  $f(x)$  volge la concavità nella direzione positiva dell'asse  $y$ . Il suo grafico è riportato in fig. 2 assieme a quelli di  $e^x$  e  $e^{-x}$  di cui è somma.

Lo studio di  $1/f(x)$  cioè di

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

si può affrontare inizialmente anche in termini informali e sintetici sfruttando la conoscenza acquisita su  $f(x)$  e il fatto che  $h(x)$  si può interpretare come una funzione composta non appena si ponga  $t = f(x)$ : in tal caso diviene  $h(t) = 1/t$ . Poiché l'andamento della funzione reciproca  $h(t) = 1/t$  è pure conosciuto in quanto, all'aumentare di  $t > 0$ , tale funzione decresce (il suo grafico è un ramo di iperbole equilatera), possiamo di conseguenza osservare che, negli intervalli in cui la funzione originaria  $t = f(x)$  appare crescente, la funzione  $h(x)$  dovrà invece essere decrescente e viceversa. In corrispondenza del punto di minimo  $x = 0$  per  $f(x)$ , la  $h(x)$  presenterà pertanto un massimo il cui valore è, evidentemente,  $h(0) = \frac{1}{2}$ . Inoltre sarà per  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $h(x) \rightarrow 0^+$  e il grafico di  $h(x)$  potrà essere approssimativamente rappresentato dalla fig. 3.



**Fig. 3.** Grafico approssimativo di  $h(x) = 1/(e^x + e^{-x})$ .

Lo studio formale del grafico di  $h(x)$  inizia invece osservando la sua simmetria pari in quanto, come già visto,  $f(-x) = f(x)$  e quindi

$$h(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)} = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre  $h(x) > 0$  nel suo dominio  $\mathbb{R}$  così come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Il calcolo della  $h'(x)$  porta all'espressione

$$h'(x) = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

e la condizione di positività  $h(x) \geq 0$  implica  $e^{-x} - e^x \geq 0$  cioè  $e^{-x} \geq e^x$  da cui  $-x \geq x$  risolta per i valori di  $x \leq 0$ . Pertanto  $h(x)$  sarà crescente per  $x < 0$  e decrescente per  $x > 0$  ammettendo un punto di massimo assoluto in  $x = 0$  (fig. 4).



Fig. 4.

La derivata seconda è

$$h''(x) = \frac{(-e^{-x} - e^x)(e^x + e^{-x})^2 - (e^{-x} - e^x) \cdot 2 \cdot (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^4}$$

espressione che si semplifica in

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{1}{(e^x + e^{-x})^3} \cdot [-e^{2x} - e^{-2x} - 2 + 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4] \\ &= \frac{1}{(e^x + e^{-x})^3} \cdot (e^{2x} + e^{-2x} - 6) \end{aligned}$$

per cui la condizione  $h''(x) \geq 0$  comporta lo studio del fattore

$$e^{2x} + e^{-2x} - 6 = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 6 \geq 0.$$

Posto  $t = e^{2x}$  e moltiplicati entrambi i membri per  $t > 0$ , l'ultima espressione si riduce alla disequazione di II grado

$$t^2 - 6t + 1 \geq 0 \quad t = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$$

che è risolta dai valori degli intervalli  $t \leq 3 - \sqrt{8} \vee t \geq 3 + \sqrt{8}$ . Queste ultime disequazioni si riportano alla variabile  $x$  come

$$e^{2x} \leq 3 - \sqrt{8} \quad \vee \quad e^{2x} \geq 3 + \sqrt{8}$$

da cui, passando ai logaritmi,

$$2x \leq \ln(3 - \sqrt{8}) \quad \vee \quad 2x \geq \ln(3 + \sqrt{8})$$

ossia

$$x \leq \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8}) \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8}).$$

Data la simmetria della funzione ci si aspetta che tali punti (di flesso) siano simmetrici rispetto allo zero e difatti la loro somma è nulla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8}) + \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) &= \frac{1}{2} [\ln(3 - \sqrt{8}) + \ln(3 + \sqrt{8})] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})] \\ &= \frac{1}{2} \ln(9 - 8) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

La funzione  $h(x)$  possiede le concavità disposte come sintetizzato dalla figura 5 e dove si è posto  $\alpha = \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8})$  e  $\beta = \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8})$ .



Fig. 5.

In definitiva il grafico di  $h(x)$  conferma quanto dedotto sinteticamente all'inizio e appare quello di fig. 6.

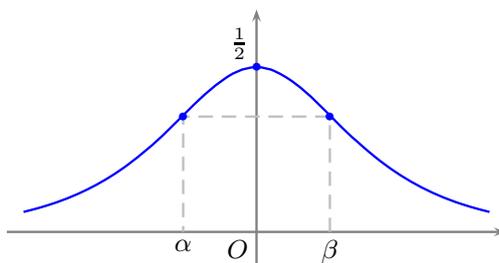


Fig. 6. Grafico di  $h(x) = 1/(e^x + e^{-x})$  (sistema non isometrico).

3. Innanzitutto si chiede di calcolare l'integrale definito

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx. \quad (4)$$

Riscritta quindi la funzione integranda come

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + (1/e^x)} dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx,$$

poniamo  $w = e^x$  il cui differenziale è  $dw = e^x dx$ . Sostituendo questi elementi nell'integrale indefinito si giunge all'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{dw}{1 + w^2}$$

che risulta noto in quanto

$$\int \frac{dw}{1 + w^2} = \operatorname{arctg}(w) + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c.$$

Pertanto l'integrale definito originario  $I(t)$  diviene

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx = [\operatorname{arctg}(e^x)]_0^t \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg} e^0 \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg} 1 \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il suo limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad (5)$$

che, per la definizione di integrale improprio su intervalli illimitati, si può pure scrivere formalmente come

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad (6)$$

diventa quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Utilizzando ancora la sostituzione  $w = e^t$  e ricordato che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$ , ci si riduce a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg}(w) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

in quanto  $\lim_{w \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} w = \frac{\pi}{2}$ . Tale risultato è in accordo con quanto stabilito nel punto 4 successivo.

Poiché l'integrale  $I(t)$  fornisce geometricamente l'area della regione (finita)  $\mathcal{R}$  compresa tra la funzione  $h(x)$ , il semiasse positivo delle  $x$  e le rette  $x = 0$  e  $x = t$  (in giallo in fig. 7), l'interpretazione geometrica del limite consiste nel rappresentare l'area della regione illimitata compresa nel primo quadrante tra la curva  $h(x)$  e gli assi  $x$  e  $y$  (regione in colore in fig. 7). Tale regione illimitata si può considerare come il limite, all'aumentare dell'estremo superiore  $t$ , dei trapezoidi  $\mathcal{R}$  definiti sugli intervalli  $[0, t]$ . Dal risultato del calcolo, l'area di tale regione illimitata è, nel nostro caso, finita.

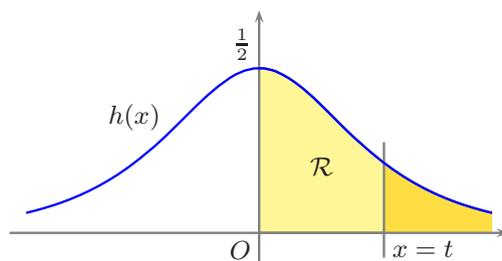


Fig. 7. Trapezoidi collegati al grafico di  $h(x)$ .

4. Per fornire un'approssimazione di  $\pi$  dovremo stimare numericamente il valore dell'integrale (5) (o (6)) fissando un valore di  $t$  sufficientemente grande in modo che l'area della regione che si trascura (in arancione in fig. 7) sia relativamente piccola. A tal fine notiamo che la funzione  $h(x) = 1/f(x)$  per  $x = 5$  assume il valore

$$h(5) = \frac{1}{f(5)} = \frac{1}{e^5 + e^{-5}} \approx 0,0067$$

che si può considerare sufficientemente prossimo allo zero. L'integrale definito avente estremo superiore  $t = 5$  potrà quindi fornire una sufficiente approssimazione a  $\frac{\pi}{4}$  ossia porremo

$$\frac{\pi}{4} \approx \int_0^5 h(x) dx. \quad (7)$$

Dobbiamo ora stimare il II membro della precedente applicando uno dei metodi di integrazione numerica, per esempio il metodo dei rettangoli o quello dei trapezi. Procederemo con quest'ultimo per cui si tratta di applicare la formula discussa nel quesito 10 dell'Esame 2006 PNI

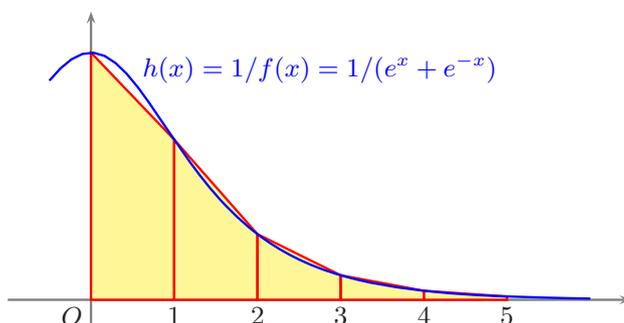
$$A = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1) + a] + f(hi + a)\}. \quad (8)$$

dove

- $\mathcal{A}$  rappresenta l'area del trapezoide di cui si vuole fornire una stima,
- $h$  l'ampiezza di ciascun intervallino in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione di estremo inferiore  $a$ ,
- $n$  il numero di intervallini in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione e
- $f(x)$  la funzione positiva che delimita il trapezoide.

Scegliamo quindi di dividere l'intervallo  $[0, 5]$  (per cui  $a = 0$ ) in  $n = 5$  intervallini, ciascuno di ampiezza  $h = 1$  e identifichiamo la funzione con quella nota  $h(x) = 1/f(x)$  (fig. 8). Ne segue che il II membro di (7) verrà calcolato tramite

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{5-1} \left\{ \frac{1}{f[0 + 1(i + 1)]} + \frac{1}{f(1 \cdot i)} \right\}$$



**Fig. 8.** Stima dell'area di un trapezoide (sistema non isometrico).

In modo più esteso l'espressione precedente diventa

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} \right] + \left[ \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} \right] + \left[ \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(2)} \right] + \left[ \frac{1}{f(4)} + \frac{1}{f(3)} \right] + \left[ \frac{1}{f(5)} + \frac{1}{f(4)} \right] \right\}$$

cioè

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{f(0)} + \frac{2}{f(1)} + \frac{2}{f(2)} + \frac{2}{f(3)} + \frac{2}{f(4)} + \frac{1}{f(5)} \right]$$

e numericamente

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\approx 0,5 \cdot (0,5 + 0,6481 + 0,2658 + 0,0993 + 0,0366 + 0,0067) \\ &= 0,5 \cdot 1,5565 = 0,7783 \end{aligned}$$

da cui discende la stima  $\pi \approx 4 \cdot 0,7783 = 3,1130$ .

Alcune righe di programmazione (non richieste dal quesito) nella sintassi del software *Mathematica* permettono di definire la funzione `area[f_,a_,b_,n_]` che restituisce la stima dell'area del trapezoide con il metodo dei trapezi non appena si siano dati la funzione  $f$ , gli estremi inferiore  $a$ , e superiore  $b$ , e il numero  $n$  degli intervallini. Trascritta quindi la relazione (8) come

$$\text{area}[f_,a_,b_,n_] := (b-a)/(2 n) \text{Sum}[ \\ f[(b-a)/n (i+1) + a] + f[(b-a)/n i + a], \\ \{i, 0, n-1\}]$$

dove  $(b-a)/n$  dà l'ampiezza comune degli intervallini, e definita la funzione

$$h[x_] := 1/(\text{Exp}[x] + \text{Exp}[-x]),$$

se riutilizziamo i valori precedenti ( $a = 0$ ,  $b = n = 5$ ) *Mathematica* restituisce

$$4 \text{ area}[h,0,5,5] \rightarrow 3.11308$$

che conferma quanto ottenuto sopra con una calcolatrice tascabile. L'approssimazione ovviamente migliora se scegliamo un intervallo più ampio ( $a = 0$ ,  $b = 10$ ) suddiviso più finemente ( $n = 15$ ): si ottiene in tal caso

$$4 \text{ area}[h,0,10,15] \rightarrow 3.14141$$

valore che differisce da  $\pi$  per meno di 2 decimillesimi.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

Il problema è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del problema n. 1.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

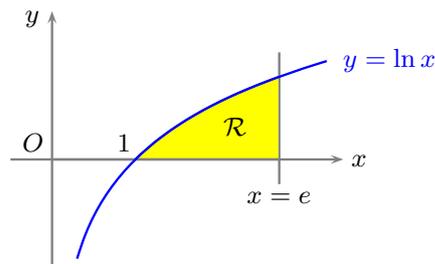
Il quesito riprende il quarto punto del problema n. 2 dell'esame di Ordinamento cui si rimanda.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

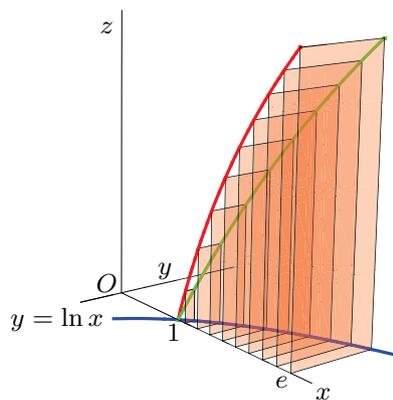
Il quesito ricalca quanto richiesto nel n. 1 dell'esame di Ordinamento ma procediamo comunque indipendentemente. La funzione  $y = \ln x$  è ben conosciuta per cui la regione  $\mathcal{R}$  avente ascisse  $x \in [1, e]$  e base del solido  $S$ , è rappresentata dal grafico di fig. 1. Se si aggiunge pure una terza dimensione perpendicolare agli assi  $x$  e  $y$  possiamo rappresentare il solido  $S$  come in fig. 2 dove si riportano alcune sue sezioni rettangolari.

Supposta nota e continua l'area di una sezione  $\mathcal{A}(x)$  ottenuta dall'intersezione del solido  $S$  con un piano perpendicolare all'asse delle ascisse compreso tra gli estremi 1 ed  $e$ , il volume  $\mathcal{V}$  del solido è dato dall'integrale

$$\mathcal{V} = \int_1^e \mathcal{A}(x) \cdot dx. \quad (1)$$



**Fig. 1.** Grafico di  $\ln x$  e regione  $R$ .



**Fig. 2.** Alcune sezioni rettangolari del solido  $S$ .

Poiché le sezioni di  $S$  sono dei rettangoli di base  $y = \ln x$  con altezza tripla della base  $h = 3y = 3 \ln x$ , la funzione che fornisce la loro area è  $\mathcal{A}(x) = y \cdot h = (\ln x)(3 \ln x) = 3 \ln^2 x$  cosicché l'integrale (1) diviene

$$\mathcal{V} = \int_1^e 3 \ln^2 x \, dx = 3 \int_1^e \ln^2 x \, dx. \quad (2)$$

Dobbiamo pertanto cercare una primitiva dell'integrale indefinito

$$\int \ln^2 x \, dx$$

che risolviamo applicando due volte il metodo per parti. Considerato quindi  $dx$  il fattore differenziale in entrambe le applicazioni, nella prima si ha

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \end{aligned}$$

mentre nella seconda si ottiene

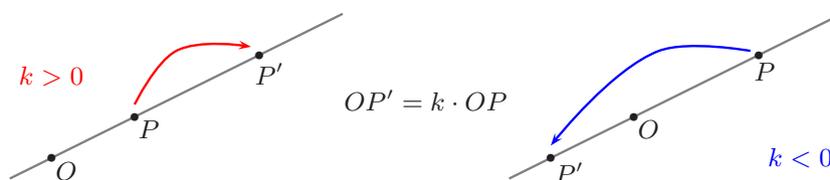
$$\begin{aligned}\int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - 2 \left[ x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right] \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c.\end{aligned}$$

Ripresa la (2), la differenza dei valori di una funzione primitiva negli estremi fornisce il volume

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 3 [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_1^e \\ &= 3(e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e) - 3(1 \ln^2 1 - 2 \ln 1 + 2) \\ &= 3(e - 2e + 2e) - 6 \\ &= 3e - 6 \approx 2,15485.\end{aligned}$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Una omotetia di centro  $O$  fissato è una trasformazione  $t_k$  del piano che associa al punto  $P$  il punto  $P'$  appartenente alla retta  $OP$  e tale che  $OP' = k \cdot OP$  ossia tale che la distanza (con segno) tra  $P'$  e il punto fisso  $O$  sia un multiplo (positivo o negativo) della distanza di  $P$  da  $O$  (fig. 1). Il numero reale  $k$  è detto il *rapporto di omotetia*.



**Fig. 1.** Omotetie di centro  $O$ .

Un insieme dotato di un'operazione binaria *interna* è un gruppo se

- vale la proprietà associativa,
- esiste l'elemento neutro rispetto a tale operazione,
- esiste l'elemento simmetrico (o inverso) rispetto all'operazione.

Se quindi  $Om(O)$  rappresenta l'insieme delle omotetie di centro  $O$ ,  $t_k$  un'omotetia di rapporto  $k$  e l'operazione (simbolo  $\circ$ ) definita su  $Om(O)$  è quella di composizione di trasformazioni, dimostriamo innanzitutto che tale composizione è intera ad  $Om(O)$ : siano quindi

$$\begin{aligned}t_{k_1} : P &\rightarrow P' \quad \text{tale che} \quad OP' = k_1 \cdot OP \\ t_{k_2} : P' &\rightarrow P'' \quad \text{tale che} \quad OP'' = k_2 \cdot OP' .\end{aligned}$$

La trasformazione composta  $t_{k_2} \circ t_{k_1}$  consiste nell'applicare una dopo l'altra le due trasformazioni (a partire da  $t_{k_1}$ ) cosicché formalmente

$$t_{k_2} \circ t_{k_1} : P \xrightarrow{t_{k_1}} P' \xrightarrow{t_{k_2}} P''$$

e in termini più espliciti, poiché  $OP'' = k_2 \cdot OP'$  e  $OP' = k_1 \cdot OP$ , risulta

$$OP'' = k_2 \cdot OP' = k_2(k_1 \cdot OP) = (k_1 k_2)OP = k \cdot OP. \quad (1)$$

con  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  e  $P''$  punti allineati. La trasformazione composta  $t_k = t_{k_2} \circ t_{k_1}$  associa quindi al punto  $P$  il punto  $P''$  tale che  $OP'' = k \cdot OP$  e ciò dimostra come questa trasformazione sia un'omotetia rientrando nella definizione ricordata sopra. Dalla (1), discende che il rapporto dell'omotetia composta  $k$  è pari al prodotto dei rapporti di ciascuna componente per cui si potrà porre

$$t_{k_1 \cdot k_2} = t_{k_2} \circ t_{k_1}.$$

Aggiungiamo inoltre che è immediato notare la commutatività della composizione per cui è anche  $t_{k_2} \circ t_{k_1} = t_{k_1} \circ t_{k_2}$ .

a) Tenendo conto di ciò la proprietà associativa

$$t_{k_1} \circ (t_{k_2} \circ t_{k_3}) = (t_{k_1} \circ t_{k_2}) \circ t_{k_3}. \quad (2)$$

si dimostra considerando che il primo membro rappresenta l'omotetia composta da

$$t_{k_2} \circ t_{k_3} = t_{k_2 \cdot k_3} \quad \text{con} \quad t_{k_1}$$

per cui

$$t_{k_1} \circ (t_{k_2} \circ t_{k_3}) = t_{(k_3 \cdot k_2) \cdot k_1} = t_{k_1 k_2 k_3} \quad (3)$$

e dove, nell'ultima uguaglianza, si sono utilizzate le proprietà associative e commutativa della moltiplicazione tra numeri reali. Il secondo membro di (2) invece è la composizione di

$$t_{k_3} \quad \text{con} \quad t_{k_1} \circ t_{k_2} = t_{k_2 \cdot k_1},$$

per cui l'omotetia risultante è

$$(t_{k_1} \circ t_{k_2}) \circ t_{k_3} = t_{k_3 \cdot (k_2 \cdot k_1)}$$

che si riduce a  $t_{k_1 k_2 k_3}$  e quindi alla (3) non appena si sfruttino le proprietà della ordinaria moltiplicazione tra numeri.

b) Esistenza dell'elemento neutro. Se  $k = 1$ , l'omotetia

$$t_1 : P \longrightarrow P' \quad \implies \quad OP' = 1 \cdot OP = OP$$

si riduce alla trasformazione identica. Difatti considerando la composizione di  $t_1$  con una generica omotetia  $t_k$  risulta

$$t_1 \circ t_k = t_{k \cdot 1} = t_k \quad \text{così come} \quad t_k \circ t_1 = t_{1 \cdot k} = t_k :$$

L'omotetia di rapporto unitario rappresenta quindi l'elemento neutro in  $Om(O)$ .

c) Esistenza dell'elemento simmetrico. Supposto  $k \neq 0$  consideriamo l'omotetia  $t_{1/k}$  di rapporto  $1/k$  che associa al punto  $P$  il punto  $P'$  in modo che

$$t_{1/k} : P \longrightarrow P' \quad \Longrightarrow \quad OP' = \frac{1}{k} \cdot OP.$$

Ne segue che la composizione di questa con la trasformazione  $t_k$  risulta

$$t_{1/k} \circ t_k = t_{k \cdot (1/k)} = t_1$$

e quindi fornisce l'elemento neutro di  $Om(O)$ . Poiché vale pure la

$$t_k \circ t_{1/k} = t_{(1/k) \cdot k} = t_1$$

possiamo in definitiva concludere che l'insieme  $Om(O)$  è un gruppo (abeliano) rispetto all'operazione di composizione.

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

rappresenta la distribuzione (detta *gaussiana*) di una variabile casuale continua  $x$  che può assumere qualsiasi valore reale. Pertanto  $f(x)$  è una densità di probabilità.

Tale densità di probabilità riveste un ruolo fondamentale nell'ambito della teoria degli errori casuali, errori che si riscontrano nella misura ripetuta di una grandezza fisica. Difatti, in tale teoria, la misura di una grandezza fisica può essere considerata come una variabile casuale continua in quanto misure ripetute ottenute nelle medesime (per quanto possibile) condizioni sperimentali, forniscono in genere valori diversi.

In base all'analisi introdotta per la prima volta da Gauss, gli errori che si commettono nell'eseguire più misure di una stessa grandezza sono determinati da diverse cause che non sono individualmente controllabili e che quindi non possono essere eliminate. In tal modo si incorre nei cosiddetti *errori casuali* o *accidentali*. Nelle ipotesi che

- a) questi errori possano assumere qualsiasi valore,

- b) sia più probabile commettere errori piccoli in valore assoluto,  
 c) il valore più probabile sia quello nullo (e che in tal caso, grandezza misurata e valore vero coincidano),

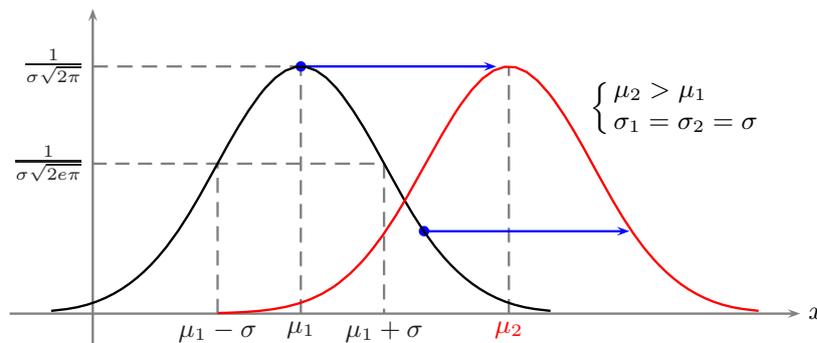
si può dedurre la distribuzione (1). Questa dipende dal parametro  $\mu$ , il valor medio, e da  $\sigma^2$  che ne è la varianza e possiede le seguenti caratteristiche generali:

- assume il valore massimo in corrispondenza del valor medio  $x = \mu$  ed è simmetrica rispetto alla retta  $x = \mu$ .
- $f(x)$  possiede due punti di flesso in corrispondenza dei valori  $x_{1,2} = \mu \pm \sigma$ , simmetrici rispetto al valor medio,
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  ossia la densità di probabilità si annulla asintoticamente per valori di  $x$  molto grandi in valore assoluto.

Il parametro  $\mu$ , del quale si può fornire una stima numerica calcolando la media aritmetica delle misure, oltre a definire il punto di massimo cui corrisponde il valore

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

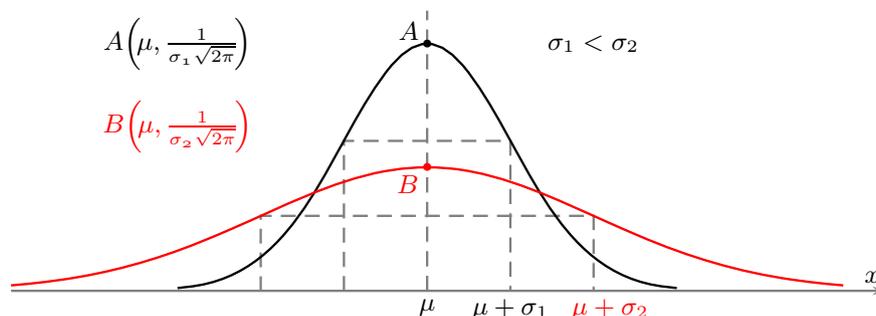
influisce sul grafico di  $f(x)$  trasladandolo parallelamente all'asse  $x$  verso valori di  $x$  maggiori se  $\mu$  aumenta, mentre nel caso  $\mu$  diminuisca, il grafico subisce una traslazione verso sinistra (fig. 1).



**Fig. 1.** Gaussian relative a valori di  $\mu$  diversi.

Il parametro varianza  $\sigma^2$  della distribuzione o la sua radice quadrata  $\sigma$  detto *scarto quadratico medio* o *deviazione standard*, caratterizza il grado di variabilità delle misure attorno alla media  $\mu$ . Difatti al diminuire di  $\sigma$ , il valore del massimo  $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$  aumenta in modo inverso mentre i punti di flesso si restringono attorno a  $\mu$  (fig. 2). Ciò accade in quanto vale la condizione di normalizzazione di una distribuzione di probabilità

$$P(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



**Fig. 2.** Gaussian relative a diversi valori di  $\sigma$ .

ossia la probabilità  $P$  di ottenere un qualsiasi valore di  $x$  è, in ogni caso, pari ad 1. In termini geometrici questo fatto impone che l'area della regione illimitata al di sotto della gaussiana abbia valore unitario.

Il seguente integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx = P(a \leq x \leq b)$$

esprime invece la probabilità che si ottenga un valore della variabile  $x$  compreso tra  $a$  e  $b$  e, pur non potendosi eseguire analiticamente, si può sulla base di valori tabulati standard ottenerne una approssimazione numerica. In particolare, si trova che

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} f(x) dx \approx 0,68$$

così come

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95, \quad P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997,$$

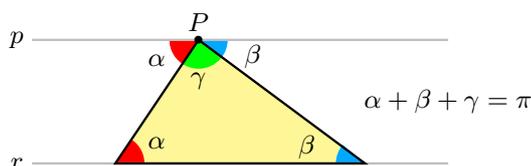
e tali valori rappresentano le probabilità dei cosiddetti *intervalli tipici* di scostamento dal valor medio  $\mu$ .\*

#### Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

La dimostrazione nell'ambito della geometria euclidea del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo si ottiene tracciando una parallela da un suo vertice al lato opposto e quindi osservando la congruenza di angoli alterni interni di rette parallele. La dimostrazione utilizza il quinto postulato ossia l'asserzione

---

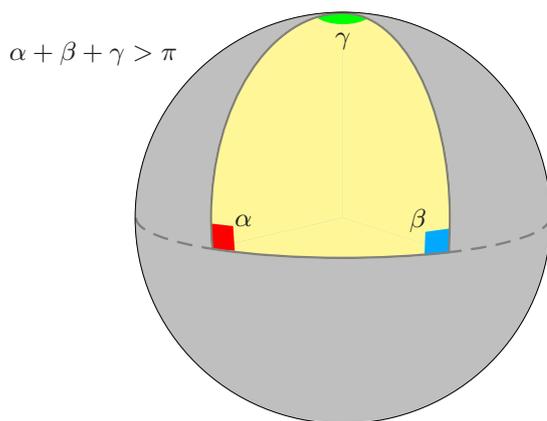
\* Per un'ulteriore discussione sulla gaussiana si veda il problema 1 dell'esame 2004 PNI.



**Fig. 1.** Angoli in un triangolo e loro somma nella geometria euclidea.

che da un punto  $P$  non appartenente ad una retta  $r$  ( $P \notin r$ ) esiste una ed una sola parallela  $p$  ad  $r$  (fig. 1).

Sostituendo tale postulato con altri si ottengono altri tipi di geometrie. In particolare se si postula che da un punto  $P$  non appartenente alla retta  $r$ , non esistano parallele ad  $r$ , si ottiene la geometria ellittica il cui modello fisico è la geometria su una superficie sferica. Difatti in tale modello una retta viene rappresentata da una circonferenza massima ossia dalla circonferenza che si ottiene intersecando la sfera con un piano passante per il suo centro. Ne segue che per un punto  $P$  non appartenente ad una circonferenza massima  $r$ , non è possibile trovare altre circonferenze massime che non incontrino  $r$  cioè che siano ad essa parallele. Inoltre in questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo può essere maggiore dell'angolo piatto. In fig. 2 ciò appare evidente in quanto il triangolo in giallo possiede gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  retti cosicché la misura dell'angolo  $\gamma$  fornisce di quanto la somma degli angoli interni del medesimo triangolo eccede  $\pi$ .



**Fig. 2.** Geometria ellittica su una superficie sferica.

Nella geometria iperbolica dato un punto  $P$  ed una retta  $r$  con  $P \notin r$ , esistono almeno due rette parallele a  $r$  passanti per  $P$  (e quindi, si può dimostrare, ne esistono infinite). La fig. 3 rappresenta un triangolo nel piano di Poincaré come intersezione di tre rette. Difatti in questo “piano”, tutto confinato entro l'orizzonte della circonferenza limite, le rette sono rappresentate dagli archi di circonferenze

che intersecano ortogonalmente la circonferenza limite. In tale contesto la somma degli angoli di un triangolo è minore di  $\pi$ .

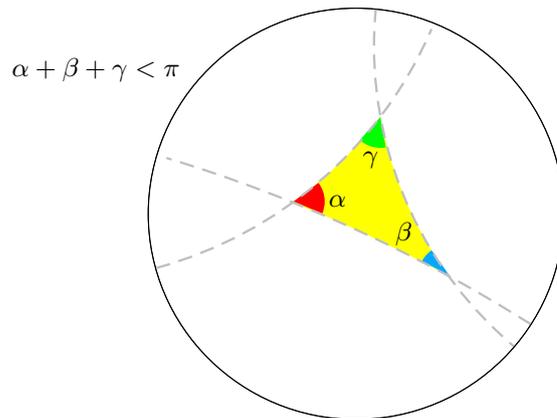


Fig. 3. Un triangolo nella geometria iperbolica del piano di Poincaré.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Tracciate le circonferenze di raggio unitario e con centri sui vertici del triangolo equilatero, l'insieme dei punti  $P$  del triangolo  $\mathcal{T}$  di lato  $l = 3$  aventi una distanza maggiore di 1 dai vertici è evidenziato in colore in fig. 1 assieme alle tre circonferenze: sia  $\mathcal{R}$  tale regione.

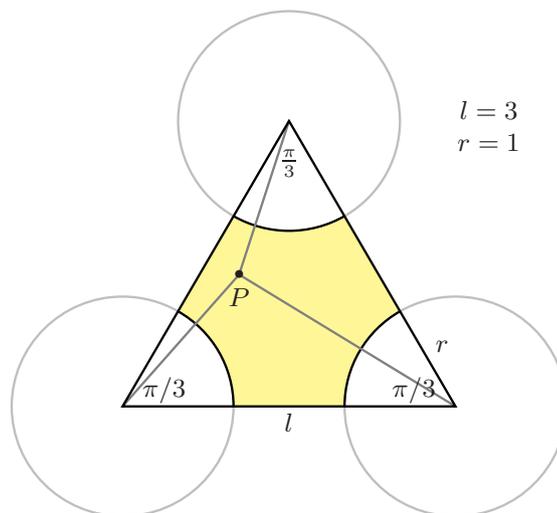


Fig. 1. Punti di  $\mathcal{T}$  con distanza maggiore di 1 dai vertici.

Per giungere alla probabilità  $p$  richiesta, si utilizza la sua definizione classica ossia la si intende come rapporto tra i casi favorevoli ad un dato evento sui casi possibili. Poiché i punti  $P$  sono presi a caso nel triangolo, il numero  $n$  di casi favorevoli è proporzionale all'area della regione  $\mathcal{R}$  cioè  $n = k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R})$  mentre quelli possibili  $N$  sono proporzionali all'area del triangolo  $\mathcal{T}$ ,  $N = k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{T})$ . Segue allora che

$$p = \frac{n}{N} = \frac{k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R})}{k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{T})} = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R})}{\mathcal{A}(\mathcal{T})}, \quad (1)$$

per cui si conoscerà  $p$  non appena noto il rapporto tra le aree di  $\mathcal{R}$  e di  $\mathcal{T}$ . L'area di  $\mathcal{R}$  si ottiene sottraendo all'area del triangolo equilatero di lato  $l = 3$  ed altezza  $h = l \sin \frac{\pi}{3}$ ,

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left( 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9}{4} \sqrt{3},$$

quella dei tre settori circolari, ciascuno con angolo al centro pari a  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Ne segue che

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - 3 \cdot \mathcal{A}(\text{sett})$$

con

$$\mathcal{A}(\text{sett}) = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Si ottiene quindi

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - 3 \cdot \mathcal{A}(\text{sett}) = \frac{9}{4} \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{9}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

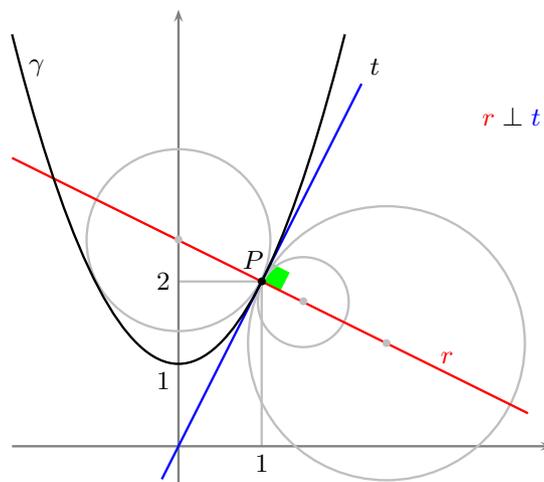
e la probabilità cercata risulta per (1)

$$p = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R})}{\mathcal{A}(\mathcal{T})} = \frac{\left( \frac{9}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{9}{4} \sqrt{3}} = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{9}{4} \sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \approx 0,5969.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Sia  $\gamma$  la parabola assegnata di equazione  $y = x^2 + 1$  e  $P$  il suo punto di coordinate  $(1, 2)$ .  $\gamma$  possiede inoltre vertice appartenente all'asse delle  $y$ ,  $V(0, 1)$  e la concavità è rivolta verso l'alto (fig. 1).

Considerando che due curve sono vicendevolmente tangenti in un punto se nello stesso punto condividono la medesima retta tangente, il luogo richiesto dev'essere la retta normale  $r$  nel punto  $P$  di  $\gamma$  (fig. 1). Difatti se  $t$  è la retta tangente in  $P$  a  $\gamma$ , la medesima retta dev'essere pure la tangente comune alle circonferenze tangenti alla parabola. E poiché il raggio avente come estremi il punto  $P$  di



**Fig. 1.** Parabola  $\gamma$  e circonferenze ad essa tangenti in  $P(1, 2)$ .

tangenza e il centro delle circonferenze è perpendicolare alla tangente, i centri di tale fascio di circonferenze apparterranno alla retta  $r$  perpendicolare a  $t$  in  $P$ . Determinato il coefficiente angolare  $m_t$  di  $t$  tramite la derivata prima

$$y' = 2x \implies y'(1) = 2 \implies m_t = 2,$$

e ricordata la condizione di perpendicolarità tra rette  $m_r = -1/m_t$ , l'equazione della normale  $r$  discende immediata dalla formula che dà l'equazione del fascio proprio di centro  $P$  cioè

$$r : y - 2 = m_r(x - 1) \implies y - 2 = -\frac{1}{m_t}(x - 1)$$

da cui

$$r : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Schematizziamo il problema e supponiamo che  $x, y, z$  sia il denaro posseduto rispettivamente dal giocatore 1, 2 e 3. Evidentemente l'ammontare complessivo in denaro rimane costante per cui, a scopo di controllo, si avrà sempre  $x + y + z = \text{costante}$ . Dopo la fine della prima partita il primo giocatore perde una quantità di denaro pari al denaro posseduto complessivamente dal secondo e terzo: questa quantità è pari a  $y + z$ . I giocatori 2 e 3 vincono invece una cifra pari a quella posseduta inizialmente e pertanto raddoppiano il loro denaro. Potremo riassumere la situazione con la tabella 1 seguente:

Tabella 1

giocatore	inizio partita 1	fine partita 1
1	$x$	$x - (y + z) = x - y - z$
2	$y$	$2y$
3	$z$	$2z$

All'inizio della seconda partita la situazione è ovviamente quella finale della precedente (nella colonna -inizio partita 2- della tabella 2 si sono assegnati dei nomi alle rispettive quantità iniziali di denaro) mentre alla fine il giocatore 2 perde una quantità di denaro pari alla somma di quanto posseduto inizialmente dai rimanenti cioè  $a_2 + c_2$  i quali, a loro volta, raddoppiano la propria quota.

Tabella 2

giocatore	inizio partita 2	fine partita 2
1	$a_2 = x - y - z$	$2a_2 = 2(x - y - z)$
2	$b_2 = 2y$	$b_2 - (a_2 + c_2) = 2y - (x - y - z) - 2z$ $= 3y - x - z$
3	$c_2 = 2z$	$2c_2 = 2(2z) = 4z$

Infine, nel terzo gioco (tabella 3), è il terzo giocatore che perde una quantità pari a quanto posseduto complessivamente (e all'inizio della terza partita) dai giocatori 1 e 2 ossia  $a_3 + b_3$  mentre, questi ultimi, raddoppiano il proprio denaro.

Tabella 3

giocatore	inizio partita 3	fine partita 3
1	$a_3 = 2(x - y - z)$	$2a_3 = 4(x - y - z)$
2	$b_3 = 3y - x - z$	$2b_3 = 6y - 2x - 2z$
3	$c_3 = 4z$	$c_3 - (a_3 + b_3) = 4z - 2(x - y - z)$ $- (3y - x - z)$ $= 7z - x - y$

In definitiva l'ammontare finale di ciascuno è dato in termini delle quantità iniziali dalle espressioni

Tabella 4

giocatore	fine partita 3
1	$4(x - y - z)$
2	$6y - 2x - 2z$
3	$7z - x - y$

per cui trovandosi ciascuno con 24 *luigi* si dovrà porre

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 24 \\ 6y - 2x - 2z = 24 \\ 7z - x - y = 24. \end{cases}$$

Semplificate le prime due equazioni dividendole rispettivamente per 4 e per 2 e riordinate le incognite

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24, \end{cases}$$

risolviamo tale sistema lineare con il metodo di Cramer per cui, individuato il determinante dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1(21 - 1) + 1(-7 - 1) - 1(1 + 3) = 8$$

si ha

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 3 & -1 \\ 24 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 24 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Sviluppando i determinanti secondo la prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{8}[6(21 - 1) + 1(12 \cdot 7 + 24) - 1(-12 - 72)] = \frac{312}{8} = 39 \\ y &= \frac{1}{8}[1(12 \cdot 7 + 24) - 6(-7 - 1) - 1(-24 + 12)] = \frac{168}{8} = 21 \\ z &= \frac{1}{8}[1(3 \cdot 24 + 12) + 1(-24 + 12) + 6(1 + 3)] = \frac{96}{8} = 12. \end{aligned}$$

In conclusione il denaro iniziale era per il primo giocatore pari a  $x = 39$  *luigi*, per il secondo  $y = 21$  *luigi* e per il terzo  $z = 12$  *luigi* ed evidentemente il perdente di questa serie di partite è il primo giocatore mentre il terzo è quello che ha vinto di più.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $f : y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$ , osserviamo che tale equazione rappresenta una parabola cubica  $f$  che diverge all'infinito come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = 2.$$

Inoltre, nel suo dominio  $\mathbb{R}$ , la derivata prima  $y' = 6x^2 - 6x + 6$  risulta sempre positiva in quanto

$$6x^2 - 6x + 6 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 1 - 4 < 0.$$

La funzione  $f$  è pertanto strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  e poiché dal calcolo diretto risulta

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \\ y(-1) &= -2 - 3 - 6 + 6 = -5 < 0, \end{aligned}$$

essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo  $[-1, 0]$ . Per quanto sopra,  $f$  nel medesimo intervallo è strettamente crescente e per l'esistenza della derivata (o perché è un polinomio) essa è pure continua. Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri che assicura l'esistenza di un valore  $\alpha$  in corrispondenza del quale risulta  $y(\alpha) = 0$ . Tale valore inoltre è unico a causa della monotonia di  $f$ .

Dimostrata l'esistenza e l'unicità di  $\alpha$ , possiamo ottenere una sua stima numerica per mezzo del metodo di bisezione. Osserviamo quindi che in corrispondenza del punto medio di  $[-1, 0]$  si ha  $y(-0,5) = 2$  per cui, data la crescita di  $f$ , si dovrà avere  $-1 < \alpha < -0,5$ . Procedendo calcolando  $f$  nei punti medi degli intervalli individuati nella iterazione precedente e caratterizzati da ampiezze via via minori, si ottiene

$$\begin{array}{ll} y(-0,75) = -1 & -0,75 < \alpha < -0,5 \\ y(-0,625) \approx 0,58 & -0,75 < \alpha < -0,625 \\ y(-0,6875) \approx -0,19 & -0,6875 < \alpha < -0,625. \end{array}$$

Osserviamo che gli estremi dell'ultimo intervallo presentano già due cifre significative, lo 0 e il 6 (evidenziate in rosso): pertanto possiamo fermare l'iterazione e concludere che  $\alpha \approx -0,6$ . Una stima più precisa di  $\alpha$  ottenuta automatizzando tale processo fornisce  $\alpha \approx -0,672496$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Si veda l'identico **decimo** quesito nell'esame di Ordinamento 2007.